АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ТОМ II
ВЫПУСК
3

1957

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том II И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 3*
1957

СОСТАВ РЕДКОЛЛЕГИИ:

Бернштейн С. Н., ***Гнеденко Б. В.***, ***Золотарев В. М.*** (ответственный секретарь), ***Колмогоров А. Н.*** (главный редактор), ***Королюк В. С.*** (зам. гл. редактора), ***Линник Ю. В.***, ***Сарымсаков Т. А.***, ***Смирнов Н. В.***, ***Хинчин А. Я.***

СОДЕРЖАНИЕ

К новым успехам Советской школы теории вероятностей 289
Яглом А. М. Некоторые классы случайных полей в n-мерном пространстве, родственные стационарным случайным процессам 292
Yaglom A. M. Certain types of random fields in n-dimensional space similar to stationary stochastic processes 337
Севастьянов Б. А. Предельные теоремы для ветвящихся случайных процессов специального вида 339
Sevastyanov B. A. Limit theorems for branching stochastic processes of special form 348
Линник Ю. В. Некоторые замечания к методу наименьших квадратов, с приложением к задачам прямых и обратных засечек 349
Linnik Yu. V. Some remarks on least squares in connection with direct and inverse location problems 359
Чистяков В. П. Локальные предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов 360
Chistyakov V. P. Local limit theorems for branching processes 374

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Рубинштейн Г. Ш. и Урбаник К. Решение одной экстремальной задачи . . . 375
Rubinstein G. Š. and Urbanik K. Solution of an extremal problem 377
Добрушин Р. Л. Некоторые классы однородных счетных марковских процессов 377
Dobrushin R. L. Some classes of homogeneous denumerable Markov processes 380
Гихман И. И. Об одном непараметрическом критерии однородности k выборок 380
Gichman I. I. Über eines nichtparametrisches Kriterium der Homogenität der k -Stichproben. 384
Черкасов И. Д. О преобразовании диффузионного процесса в винеровский 384
Cherkasov I. D. On transforming the diffusion process to a Wiener process . . 388

Адрес редакции: Москва, В-234, МГУ, Мех.-матем. факультет, тел. В-9-14-03

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том II И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 3
1957

К НОВЫМ УСПЕХАМ СОВЕТСКОЙ ШКОЛЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Великая Октябрьская социалистическая революция явилась поворотным пунктом в истории не только нашей страны, но и всего человечества. Под руководством Коммунистической партии народы Советского Союза за сорок лет советской власти добились огромных успехов во всех областях своей жизни — политической, экономической и культурной. В блестящем общем подъеме советской науки видное место занимает математика. Широко разрабатывая абстрактные теории, советские математики не отрывались и от нужд практики. Им удалось внести серьезный вклад во многие прикладные области, а также непосредственно участвовать своими исследованиями в решении многочисленных практических задач, имевших важное значение для народного хозяйства.

Великая Отечественная война поставила перед учеными новые задачи, которые требовали не только огромного напряжения сил, но и срочности исполнения. Наши математики с честью справились с этой ответственной и почетной миссией.

Послевоенный период восстановления и дальнейшего бурного развития народного хозяйства предъявил и предъявляет все новые и новые требования к математике, как в отношении развития новых теорий, создания новых математических дисциплин, так и в отношении решения многих важных конкретных задач практики. Советская наука и на этот раз не остается в стороне от жизни.

Теория вероятностей и математическая статистика за последние десятилетия привлекли к себе внимание многих выдающихся ученых во всем мире. За это время с особой силой и широтой обнаружилось значение названных областей математики для большинства естественных и прикладных дисциплин. Особый интерес проявляется к теории вероятностей со стороны техники, физики и биологии. Зачастую выдвигаемые ими задачи приводят к широким общетеоретическим обобщениям, оказывающим решающее влияние на развитие всей теории вероятностей, а также на другие ветви математики.

Интерес русских ученых к теории вероятностей, берущий свое начало еще в трудах М. В. Остроградского и В. Я. Буняковского, стал традиционным для русской науки после выдающихся исследований П. Л. Чебышева, А. М. Ляпунова и А. А. Маркова. Эти исследования оказали огромное влияние на все дальнейшее развитие теории вероятностей. Идеи, выдвинутые указанными учеными, особенно широко были подхвачены и

развиты в нашей стране после Великой Октябрьской революции. Уже в первые годы советской власти появились исследования С. Н. Бернштейна, посвященные закону больших чисел и аксиоматическому построению теории вероятностей. Через несколько лет были опубликованы работы А. Я. Хинчина, а затем А. Н. Колмогорова, посвященные закону повторного логарифма. Вскоре появилась совместная статья тех же авторов, касающаяся сходимости рядов независимых случайных величин. Эти работы положили начало московской школе теории вероятностей. Одновременно в Киеве были начаты Е. Е. Слуцким исследования по теории случайных функций.

Советская школа теории вероятностей сразу завоевала выдающееся место в науке. Это место было прочно закреплено многочисленными исследованиями, среди которых мы укажем только работы С. Н. Бернштейна по обобщению и усилению классических предельных теорем, А. Я. Хинчина и А. Н. Колмогорова о законе больших чисел, Е. Е. Слуцкого о случайных функциях, А.Н. Колмогорова по аксиоматике теории вероятностей, В. И. Гливенко о законе больших чисел и распределениях в функциональных пространствах.

Тридцатые годы принесли новые успехи. К этому периоду относятся исследования А. Я. Хинчина, А. Н. Колмогорова, Г. М. Бавли, Б. В. Гнеденко и др. по теории суммирования независимых случайных величин; А. Н. Колмогорова по теории процессов и цепей Маркова; А. Я. Хинчина по теории стационарных случайных процессов, Е. Е. Слуцкого по теории случайных функций; С. Н. Бернштейна по теории стохастических дифференциальных уравнений; В. И. Гливенко, А. Н. Колмогорова и Н. В. Смирнова по непараметрическим задачам статистики; Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова по общей теории меры и эргодическим теоремам; Е. Е. Слуцкого по статистике; В. И. Романовского и его учеников по статистике и цепям Маркова; А. Н. Колмогорова по экстраполяции и интерполяции стационарных случайных процессов.

Советские ученые всегда будут помнить талантливых исследователей в области теории вероятностей Г. М. Бавли, В. В. Бебутова, В. Н. Засухина и др., погибших в годы Отечественной войны.

В военные годы научные исследования в области теории вероятностей и математической статистики не прекращались. В этот тяжелый для страны период основные усилия ученых были направлены на разрешение важных практических задач. Однако и в этот период было выполнено несколько превосходных исследований общетеоретического значения. В послевоенные годы значительно пополнилось число исследователей в области теории вероятностей. В Москве Е. Б. Дынкин с группой учеников широко поставил общее исследование марковских процессов; существенные обобщения предельных теорем дали Ю. В. Прохоров (Москва), И. И. Гихман (Киев), С. Х. Сираждинов (Ташкент). В Ленинграде исследования по теории вероятностей возглавил Ю. В. Линник и около него сгруппировалась талантливая молодежь. Многочисленной стала также группа киевских ученых, избравших теорию вероятностей основным полем своих исследований. Благодаря деятельности В. И. Романовского и энергии Т. А. Сарымсакова продолжалась интенсивная работа по теории

вероятностей в Ташкенте. Широко представлена эта область науки теперь также в Ереване.

Мы можем с гордостью оглянуться на путь, который пройден советской школой теории вероятностей за истекшие сорок лет. В успехах прошлого мы видим залог будущего ее процветания. Большие и сложные задачи стоят перед нами. Идеи, методы и результаты теории вероятностей проникают все в новые и новые области науки и практики. Все это требует непрерывного развития и совершенствования советской школы теории вероятностей. Наряду с дальнейшим развитием общетеоретических исследований и созданием новых разделов теории вероятностей, необходимо широко внедрять статистические методы исследований в различные области техники, естествознания, медицины, экономики, сельского хозяйства. Чтобы успешно справиться с этими задачами, необходимо дальнейшее увеличение и улучшение подготовки специалистов в области теории вероятностей и математической статистики; создание обширной учебной и монографической литературы; организация статистических научно-исследовательских центров.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том II И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 3*
1957

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ, РОДСТВЕННЫЕ СТАЦИОНАРНЫМ СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССАМ

А. М. ЯГЛОМ

1. Введение

За последние десятилетия очень большое развитие получила теория случайных процессов — случайных функций одного вещественного аргумента, обычно рассматриваемого как время. В настоящее время этой теории посвящен целый ряд специальных монографий и обзорных статей (см., например, [1] — [5]). Значительно менее изучена теория случайных функций многих переменных, некоторым вопросам которой и посвящена настоящая статья.

Мы будем рассматривать комплексные случайные функции $\xi(\mathbf{x}) = \xi(x_1, \ldots, x_n)$ от n вещественных аргументов, т. е. от точки n-мерного пространства R_n; такие функции мы будем называть *случайными полями* в R_n. Наряду с обычными полями $\xi(\mathbf{x})$ будут рассматриваться также *обобщенные случайные поля* (в смысле Ито [6] — Гельфанда [7]*) в R_n, т. е. случайные линейные функционалы $\xi(\varphi)$ относительно φ, где $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ — произвольная функция из класса D бесконечно дифференцируемых комплексных функций n переменных, таких, что каждая из них равна нулю вне некоторого компакта. При этом мы ограничимся лишь корреляционной теорией случайных полей, т. е. случайные величины, равные друг другу с вероятностью 1, будем считать совпадающими и будем рассматривать лишь первые и вторые моменты

$$\mathbf{M}\xi(\mathbf{x}) = m(\mathbf{x}), \quad \mathbf{M}\xi(\mathbf{x}_1)\overline{\xi(\mathbf{x}_2)} = B(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \tag{1.1}$$

или

$$\mathbf{M}\xi(\varphi) = m(\varphi), \quad \mathbf{M}\xi(\varphi_1)\overline{\xi(\varphi_2)} = B(\varphi_1, \varphi_2) \tag{1.2}$$

случайных величин $\xi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in R_n$ или, соответственно, $\xi(\varphi)$, $\varphi \in D$. Математические ожидания (1.1) и (1.2) в дальнейшем всегда будут предполагаться конечными; помимо того, рассматриваемые поля всегда будут предполагаться непрерывными в том смысле, что

$$\lim_{\mathbf{x}_1 \to \mathbf{x}} \mathbf{M}|\xi(\mathbf{x}_1) - \xi(\mathbf{x})|^2 = 0 \tag{1.3}$$

или соответственно

$$\lim_{\varphi_1 \to \varphi} \mathbf{M}|\xi(\varphi_1) - \xi(\varphi)|^2 = 0, \tag{1.4}$$

* Автор благодарен И. М. Гельфанду, ознакомившему его с рукописью, содержащей полные доказательства всех результатов, указанных в [7], и некоторых новых, примыкающих к ним.

где в (1.4) $\varphi_1 \to \varphi$ понимается в смысле обычной топологии Шварца [8] в пространстве D (т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_1^{(n)} = \varphi$ означает, что все функции $\varphi_1^{(n)}$ и φ равны нулю вне одного и того же компакта и что на этом компакте все частные производные $\varphi_1^{(n)}$ стремятся при $n \to \infty$ к соответствующим частным производным функции φ). Ясно, что каждому непрерывному случайному полю можно с помощью формулы

$$\xi(\varphi) = \int_{R_n} \xi(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \quad d\mathbf{x} = dx_1 \dots dx_n \tag{1.5}$$

сопоставить определенное непрерывное обобщенное поле $\xi(\varphi)$; в этом смысле обыкновенные случайные поля являются частным случаем обобщенных. В то же время переход к более общему случаю обобщенных случайных полей в некоторых случаях даже упрощает доказательства; поэтому в дальнейшем мы всегда будем сперва рассматривать обобщенные поля, а соответствующие результаты для обыкновенных полей будем затем получать в виде следствий.

В приложениях случайные поля $\xi(\mathbf{x})$ прежде всего встретились в статистической теории турбулентности; в связи с той особо важной ролью, которую ,начиная с работы Тэйлора [9], играют в этой теории специальные случаи однородной гурбулентности и однородной и изотропной турбулентности, в первую очередь здесь пришлось иметь дело с понятиями однородного и, соответственно, однородного и изотропного случайных полей, обобщающими понятие стационарного случайного процесса. В этой связи в ряде работ по теории турбулентности, опубликованных в физических и геофизических журналах (см., например, [9] — [14]), были указаны многие важные результаты, касающиеся таких полей $\xi(\mathbf{x})$; некоторые из этих результатов в последнее время излагались и в математической литературе (см. [3] — [5], [15]), однако, как правило, без полных математических доказательств.* Дальнейшее развитие статистической теории турбулентности, связанное с введенным А. Н. Колмогоровым ([17], [18]) важным понятием локально однородной и локально изотропной турбулентности, потребовало рассмотрения также и более общих локально однородных, а также локально однородных и локально изотропных случайных полей, обобщающих понятие процесса со стационарными приращениями; такие поля в указанной связи многократно упоминались в литературе (см., например, [14], [15], [19],]20]), однако математически они, по-видимому, до сих пор почти совсем не были изучены. Цель настоящей статьи и заключается в том, чтобы дать по возможности законченную математическую теорию всех перечисленных классов случайных полей, аналогичную хорошо известной теории стационарных случайных процессов и процессов со стационарными приращениями.

---

* Во время работы над оформлением настоящей статьи автор познакомился со статьей Ито [16], посвященной математической теории одного класса многомерных обобщенных однородных и изотропных случайных полей, включающего в качестве частного случая все поля, рассматриваемые в следующем ниже § 4. Результаты Ито (снабженные лишь наброском доказательства) охватывают, однако, сравнительно небольшую часть результатов нашего § 4.

2. Однородные случайные поля

Введем в рассмотрение оператор $\tau_{\mathbf{y}}$ сдвига аргумента функций φ из пространства D на вектор $\mathbf{y}$:

$$\tau_{\mathbf{y}}\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}). \tag{2.1}$$

Случайное поле $\xi(\varphi)$ (вообще говоря, обобщенное) называется *однородным* *, если первый и второй моменты этого поля — *среднее значение* $m(\varphi)$ и *корреляционный функционал* $B(\varphi_1, \varphi_2)$ инвариантны относительно любого сдвига $\tau_{\mathbf{y}}$ их функциональных аргументов:

$$m(\varphi) = m(\tau_{\mathbf{y}}\varphi), \tag{2.2}$$

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = B(\tau_{\mathbf{y}}\varphi_1, \tau_{\mathbf{y}}\varphi_2). \tag{2.3}$$

Эти условия, очевидно, будут выполняться в том, в частности, случае, когда $\xi(\varphi)$ определяется формулой (1.5), где $\xi(\mathbf{x})$ — обыкновенное случайное поле такое, что при любом $\mathbf{y} \in R_n$ среднее значение $m(\mathbf{x})$ и корреляционная функция $B(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ удовлетворяют соотношениям

$$m(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = m(\mathbf{x}), \text{ т. е. } m(\mathbf{x}) = m = \text{const}, \tag{2.4}$$

$$B(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = B(\mathbf{x}_1+\mathbf{y}, \mathbf{x}_2+\mathbf{y}), \text{ т. е. } B(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = B(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2). \tag{2.5}$$

Условия (2.4) и (2.5) являются условиями однородного обыкновенного (необобщенного) поля $\xi(\mathbf{x})$.

Теорема 1. *Для любого (обобщенного) однородного случайного поля* $\xi(\varphi)$ *в* R_n *среднее значение* $m(\varphi)$ *и корреляционный функционал* $B(\varphi_1, \varphi_2)$ *могут быть представлены в виде*:

$$m(\varphi) = m\widetilde{\varphi}(\mathbf{0}), \text{ где } \mathbf{0} = \{0, \ldots, 0\} \tag{2.6}$$

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{R_n} \widetilde{\varphi}_1(\boldsymbol{\lambda})\,\overline{\widetilde{\varphi}_2(\boldsymbol{\lambda})}\,F(d\boldsymbol{\lambda}), \tag{2.7}$$

где m *— постоянная,* $\widetilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda}) = \int_{P_n} e^{i\boldsymbol{\lambda}\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ *— преобразование Фурье функции* $\varphi(\mathbf{x})$, *а* $F(S)$ *— мера в* n*-мерном пространстве* P_n *«волновых векторов»* $\boldsymbol{\lambda}$ *такая, что для некоторого неотрицательного числа* p *выполняется неравенство*

$$\int_{P_n} \frac{F(d\lambda)}{(1+\lambda^2)^p} < \infty, \quad \lambda = |\boldsymbol{\lambda}| = \sqrt{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2} \tag{2.8}$$

(*«медленно растущая мера»*). *Обратно, каждый линейный функционал вида* (2.6), *где* m *— постоянная, является средним значением некоторого*

* Строго говоря, следовало бы сказать *однородным в широком смысле.* Следуя принятой в теории случайных процессов терминологии, однородным в узком смысле следует назвать поле $\xi(\varphi)$, для которого все конечномерные распределения вероятностей системы величин $\xi(\varphi_1), \ldots, \xi(\varphi_k)$ при любых k и $\varphi_k \in D$ инвариантны относительно любого сдвига $\tau_{\mathbf{y}}$ функций φ_k. Однако в корреляционной теории интерес представляют только свойства в широком смысле; поэтому свойства в узком смысле почти нигде ниже встречаться не будут, и пояснение «в широком смысле», как правило, будет опускаться (ср., впрочем, замечание 1 к теоремам 1,2 и некоторым другим).

обобщенного однородного случайного поля, а всякий билинейный функционал вида (2.7), *где* $F(S)$ — *медленно растущая мера в* P_n, *является корреляционным функционалом некоторого такого поля.*

Меру $F(S)$ мы будем далее называть *спектральной мерой* поля $\xi(\varphi)$.

Доказательство. Воспользуемся тем известным обстоятельством (см. [8,21]), что всякий линейный функционал $m(\varphi)$ в пространстве $D(T)$ бесконечно дифференцируемых функций на заданном конечном n-мерном параллелепипеде T (где $D(T)$ рассматривается как подпространство пространства D) может быть представлен в виде

$$m(\varphi) = \int_{R_n} g(\mathbf{x}) \frac{\partial^N \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} d\mathbf{x}, \quad N = k_1 + \dots + k_n, \tag{2.9}$$

где $g(\mathbf{x})$ — непрерывная функция от $\mathbf{x}$. Но в таком случае из (2.2) вытекает, что среднее значение $m(\varphi)$ обобщенного однородного случайного поля представимо в том же виде (2.9) и при $\varphi \in D(\tau_{\mathbf{y}} T)$ (здесь $\tau_{\mathbf{y}} T$ — совокупность точек $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in T$) для любого $\mathbf{y} \in R_n$. Так как параллелепипедами $\tau_{\mathbf{y}_i} T$; $i = 1,2, \dots$ мы можем заполнить все пространство R_n, то, в силу линейности $m(\varphi)$, отсюда вытекает, что представление (2.9) справедливо и для всех $\varphi \in D$ (функцию $g(\mathbf{x})$ здесь также можно считать непрерывной, так как степень гладкости этой функции всегда можно увеличить при помощи интегрирования по частям). Далее, согласно (2.2)

$$\int_{R_n} [g(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - g(\mathbf{x})] \frac{\partial^N \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} d\mathbf{x} = 0 \tag{2.10}$$

при любых $\mathbf{y} \in R_n$, $\varphi \in D$. Последнее равенство показывает, что $g(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - g(\mathbf{x})$ — многочлен относительно $x_1, \dots, x_n$ (с коэффициентами, могущими зависеть от $y_1, \dots, y_n$), степень которого по x_j; $j = 1, \dots, n$ не превосходит $k_j - 1$. Но в таком случае $g(\mathbf{x})$ — многочлен, степень которого по x_j не превосходит k_j, и из (2.9) после ряда интегрирований по частям получается формула

$$m(\varphi) = m \int_{R_n} \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{2.11}$$

равносильная (2.6).

То, что каждый функционал вида (2.6) является средним значением некоторого однородного случайного поля $\xi(\varphi)$, совершенно очевидно: в качестве такого поля можно взять, например, поле, равное $m\widetilde{\varphi}(0)$ с вероятностью 1.

Доказательство формулы (2.7), а также того, что и обратно каждый билинейный функционал вида (2.7) является корреляционным функционалом некоторого обобщенного однородного поля $\xi(\varphi)$, ничем не отличается от соответствующего доказательства для стационарных случайных процессов (т. е. для случая $n = 1$), подробно изложенного в работе [6].

Замечание 1. Поле $\xi(\varphi)$ называется вещественным, если $\xi(\overline{\varphi}) = \overline{\xi(\varphi)}$ (так что $\xi(\varphi)$ — вещественная случайная величина, если φ — вещественная функция); для полей вида (1.5) это определение сводится к обыч-

ному $\overline{\xi(\mathbf{x})} = \xi(\mathbf{x})$. Легко понять, что для вещественных полей постоянная m должна быть вещественной, а мера $F(S)$ такой, что $F(-S) = F(S)$ (где $-S$ — множество, симметричное S относительно начала координат пространства P_n). Выполнение указанных условий относительно m и $F(S)$ необходимо и достаточно, чтобы было $m(\overline{\varphi}) = \overline{m(\varphi)}$, $B(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2) = \overline{B(\varphi_1, \varphi_2)}$; поле $\xi(\varphi)$ в этом случае мы будем называть *вещественным в широком смысле*.

Замечание 2. Если среднее значение поля $\xi(\varphi)$ равно (2.6), то корреляционный функционал, очевидно, можно записать в виде

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = |m|^2 \widetilde{\varphi}_1(0)\,\overline{\widetilde{\varphi}_2(0)} + B_1(\varphi_1, \varphi_2), \tag{2.12}$$

где $B_1(\varphi_1, \varphi_2)$ — корреляционный функционал поля $\xi_1(\varphi) = \xi(\varphi) - m(\varphi)$, имеющего нулевое среднее значение. Отсюда ясно, что в этом случае должно выполняться неравенство

$$F(\mathbf{0}) \geqslant |m|^2 \tag{2.13}$$

($F(\mathbf{0})$ это F-мера точки $\mathbf{0}$ — начала координат пространства P_n).

Замечание 3. В случае, когда $\xi(\varphi)$ определяется формулой (1.5) (т. е. для обыкновенных случайных полей) формула (2.6) приобретает вид:

$$\int_{R_n} \mathbf{M}\xi(\mathbf{x}) \cdot \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = m \int_{R_n} \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \varphi \in D \tag{2.14}$$

т. е. она означает, что

$$\mathbf{M}\xi(\mathbf{x}) = m = \text{const}. \tag{2.15}$$

Аналогично формула (2.7) здесь обращается в

$$\int_{R_n}\int_{R_n} B(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\,\varphi(\mathbf{x}_1)\overline{\varphi(\mathbf{x}_2)}\, d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 =$$

$$= \int_{P_n}\int_{R_n}\int_{R_n} e^{i\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}\varphi(\mathbf{x}_1)\overline{\varphi(\mathbf{x}_2)}\, d\mathbf{x}_1\, d\mathbf{x}_2 F(d\boldsymbol{\lambda}); \tag{2.16}$$

она означает, что

$$B(\mathbf{x}) = \int_{P_n} e^{i\boldsymbol{\lambda}\mathbf{x}} F(d\boldsymbol{\lambda}). \tag{2.17}$$

Для того чтобы последняя формула имела смысл, очевидно, должно выполняться неравенство

$$\int_{P_n} F(d\boldsymbol{\lambda}) < \infty; \tag{2.18}$$

таким образом, для обыкновенных однородных полей в (2.8) можно положить $p = 0$. Немного ниже (см. замечание 3 к теореме 3) мы увидим, что и обратно — если в (2.8) можно положить $p = 0$, то случайное поле $\xi(\varphi)$ обязательно представимо в виде (1.5), где $\xi(\mathbf{x})$ — обыкновенное однородное случайное поле.

Отметим еще, что имеет место следующее дополнение к теореме 1:

Теорема 1′. *В условиях теоремы 1 константа m и мера $F(S)$ однозначно определяются полем $\xi(\varphi)$ (т. е. функционалами $m(\varphi)$ и $B(\varphi_1, \varphi_2)$). А именно*

$$m = \frac{m(\varphi)}{\int\limits_{R_n} \varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x}}, \tag{2.6′}$$

где φ — произвольная функция из D такая, что знаменатель в правой части (2.6) не обращается в нуль, а

$$F(S) = \lim_{m\to\infty} B(\varphi_S^{(m)}, \varphi_S^{(m)}), \tag{2.7′}$$

где S — произвольное F-измеримое множество, а $\varphi_S^{(m)}(\mathbf{x})$; $m = 1, 2, \ldots$ — последовательность функций из D такая, что $\widetilde{\varphi}_S^{(m)}(\boldsymbol{\lambda}) \to \chi_S(\boldsymbol{\lambda})$ при $m \to \infty$, где $\chi_S(\boldsymbol{\lambda})$ — характеристическая функция S, а сходимость к $\chi_S(\boldsymbol{\lambda})$ понимается как сходимость в среднем квадратичном относительно меры F.

Доказательство. Формула (2.6′), очевидно, немедленно следует из (2.6). Формула (2.7′) столь же очевидно следует из (2.7), так что остается только доказать, что последовательность функций $\varphi_S^{(m)}(\mathbf{x})$ из D с указанными в формулировке теоремы свойствами действительно существует. Но последнее обстоятельство вытекает из более общего утверждения о полноте множества $\widetilde{D} = \left\{\varphi(\boldsymbol{\lambda}) = \int\limits_{R_n} e^{i\boldsymbol{\lambda}\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},\ \varphi \in D\right\}$ функций $\widetilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda})$, каждая из которых в силу неограниченной дифференцируемости $\varphi(\mathbf{x})$, очевидно, убывает на бесконечности быстрее любой конечной степени $|\boldsymbol{\lambda}|$, в гильбертовом пространстве $L^2(P_n; F)$ функций на P_n с интегрируемым относительно F-меры квадратом модуля для любой «медленно растущей» меры F; доказательство этого последнего утверждения можно найти, например, в [6].

В случае обыкновенного (не обобщенного) поля ξ константа m определяется из (2.15), а мера $F(S)$ в силу (2.17) находится из известной формулы обращения теории многомерных характеристических функций (см., например, [22], теорема 9а; ср. также ниже формулу (4.13)).

Рассмотрим еще случай *многомерного поля* $\boldsymbol{\xi}(\varphi) = \{\xi_1(\varphi), \ldots, \xi_N(\varphi)\}$. Здесь основную роль играет вектор средних значений

$$\mathbf{m}(\varphi) = \{\mathbf{M}\xi_1(\varphi), \ldots, \mathbf{M}\xi_N(\varphi)\} \tag{2.19}$$

и матрица корреляционных функционалов*

$$\mathcal{B}(\varphi_1, \varphi_2) = \|B_{ij}(\varphi_1, \varphi_2)\| = \|\mathbf{M}\xi_i(\varphi_1)\overline{\xi_j(\varphi_2)}\|. \tag{2.20}$$

Поле $\boldsymbol{\xi}(\varphi)$ мы будем называть *однородным*, если

$$\mathbf{m}(\varphi) = \mathbf{m}(\tau_{\mathbf{y}}\varphi), \quad \mathcal{B}(\varphi_1, \varphi_2) = \mathcal{B}(\tau_{\mathbf{y}}\varphi_1, \tau_{\mathbf{y}}\varphi_2) \tag{2.21}$$

при любом $\mathbf{y} \in R_n$; иначе это обстоятельство мы будем еще выражать, говоря, что все компоненты поля $\boldsymbol{\xi}(\varphi) = \{\xi_1(\varphi), \ldots, \xi_N(\varphi)\}$ являются

* Фигурные буквы в этой статье всегда будут обозначать матрицы.

однородными и однородно связанными полями. Изучение многомерного однородного случайного поля можно свести к изучению одномерного поля

$$\xi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N}(\varphi) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \xi_k(\varphi), \tag{2.22}$$

линейно зависящего от комплексных параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$. Далее нужно только применить к полю $\xi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N}(\varphi)$ полученные раньше результаты и воспользоваться тем, что среднее значение $m_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N}(\varphi)$ поля $\xi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N}(\varphi)$ линейно зависит от параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$, а корреляционный функционал $B_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N}(\varphi_1, \varphi_2)$ этого поля является эрмитовой квадратичной формой от этих параметров. Переходя далее с помощью известного приема от квадратичной формы $B_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N}(\varphi_1, \varphi_2)$ к соответствующей билинейной форме $B_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N;\,\beta_1,\ldots,\beta_N}(\varphi_1, \varphi_2)$ и полагая $\alpha_k = \delta_{ki}$, $\beta_k = \delta_{kj}$ (где δ_{ki}—символ Кронекера), а затем, повторив рассуждения, используемые при доказательстве обратной части теоремы 1, легко получим следующий результат:

Теорема 2. *Для любого многомерного однородного случайного поля* $\xi(\varphi) = \{\xi_1(\varphi), \ldots, \xi_N(\varphi)\}$ *в* R_n *вектор средних значений* $\mathbf{m}(\varphi) = \{m_1(\varphi), \ldots, m_N(\varphi)\}$ *и матрица корреляционных функционалов* $\mathcal{B}(\varphi_1, \varphi_2) = \|B_{ij}(\varphi_1, \varphi_2)\|$ *могут быть представлены в виде*:

$$\mathbf{m}(\varphi) = \mathbf{m} \cdot \widetilde{\varphi}(0), \tag{2.23}$$

$$\mathcal{B}(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{P_n} \widetilde{\varphi}_1(\boldsymbol{\lambda})\, \overline{\widetilde{\varphi}_2(\boldsymbol{\lambda})}\, \mathcal{F}(d\boldsymbol{\lambda}), \tag{2.24}$$

где $\mathbf{m} = \{m_1, \ldots, m_N\}$ *— постоянный вектор,* $\widetilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda}) = \int_{R_n} e^{i\boldsymbol{\lambda}\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ *— преобразование Фурье функции* $\varphi(\mathbf{x})$, *а*

$$\mathcal{F}(S) = \|F_{ij}(S)\| \tag{2.25}$$

матрица комплексных аддитивных функций множества S n*-мерного пространства* P_n (*«комплексных мер» в* P_n) *таких, что для всех* $i, j = 1, \ldots, N$

$$\int_{P_n} \frac{|F_{ij}(d\lambda)|}{(1+\lambda^2)^p} < \infty \tag{2.26}$$

при некотором неотрицательном p, *и что матрица* $F(S)$ *при любом* S *является эрмитовой неотрицательной.*

Обратно, если $\mathbf{m}$ *— любой постоянный вектор, то* (2.23) *определяет вектор средних значений некоторого однородного многомерного поля; аналогично матрица* (2.24) *при* $\mathcal{F}(S)$, *удовлетворяющей указанным выше условиям, является матрицей корреляционных функционалов некоторого такого поля.*

Матрицу комплексных мер $\mathcal{F}(S)$ мы будем называть *спектральной матрицей* многомерного поля $\xi(\varphi)$.

Замечание 1. В случае вещественных полей $\xi_i(\varphi)$, $i = 1, \ldots, N$,

вектор $\mathbf{m}$, очевидно, будет вещественным, а $F_{ij}(S)$ будут такими, что $F_{ij}(S) = \overline{F_{ij}(-S)}$. Выполнение этих условий относительно $\mathbf{m}$ и $F_{ij}(S)$ не гарантирует еще вещественности полей $\xi_i(\varphi)$; однако в таком случае всегда $\mathbf{m}(\overline{\varphi}) = \overline{\mathbf{m}(\varphi)}$ и $B_{ij}(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2) = \overline{B_{ij}(\varphi_1, \varphi_2)}$, т. е. поле $\boldsymbol{\xi}(\varphi)$ будет вещественным в широком смысле.

Замечание 2. Матрица $\mathscr{F}(S)$ связана с вектором $\mathbf{m}$ условием, что матрица $\mathscr{F}(0) - \mathbf{m}\overline{\mathbf{m}}$, где знаком $\mathbf{m}\overline{\mathbf{m}}$ (без точки) обозначено тензорное (диадное) произведение векторов $\mathbf{m}$ и $\overline{\mathbf{m}}$, является неотрицательной (так что, в частности, $F_{ii}(\mathbf{0}) \geqslant |m_i|^2$, $i = 1, \ldots, N$).

Замечание 3. В случае полей $\xi_i(\varphi)$; $i = 1, \ldots, N$, вида (1.5) число p в равенстве (2.26) можно положить равным нулю и (2.24) можно переписать в виде

$$\mathscr{B}(\mathbf{r}) = \int_{P_n} e^{i\lambda \mathbf{r}} \mathscr{F}(d\boldsymbol{\lambda}), \tag{2.27}$$

где

$$\mathscr{B}(\mathbf{r}) = \| \mathbf{M}\xi_i(\mathbf{x} + \mathbf{r})\overline{\xi_j(\mathbf{x})} \| \tag{2.28}$$

— корреляционная матрица поля $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \{\xi_1(\mathbf{x}), \ldots, \xi_N(\mathbf{x})\}$.

Аналогично теореме 1′ можно доказать следующую теорему:

Теорема 2′. *В условиях теоремы 2 вектор m и матрица $\mathscr{F}(S)$ однозначно определяются полем $\boldsymbol{\xi}(\varphi)$. А именно*

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{m}(\varphi)}{\int\limits_{R_n} \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}} \tag{2.23′}$$

и

$$\mathscr{F}(S) = \lim_{m \to \infty} \mathscr{B}(\varphi_S^{(m)}, \varphi_S^{(m)}), \tag{2.24′}$$

где $\varphi(\mathbf{x})$ и последовательность $\varphi_S^{(m)}(\mathbf{x})$; $m = 1, 2, \ldots$ имеют тот же смысл, что и в (2.6′) *и* (2.7′).

В случае обыкновенного (не обобщенного) поля $\boldsymbol{\xi}$ вектор $\mathbf{m}$ можно определить из равенства $\mathbf{m} = \mathbf{M}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$, а вместо (2.24′) в силу (2.27) можно воспользоваться обычной формулой обращения интегралов Фурье—Стильтьеса.

Основным содержанием теорем 1 и 2 являются формулы (2.7) и (2.24), задающие *спектральное разложение корреляционных функционалов* однородных случайных полей. Перейдем теперь к вопросу о *спектральном разложении* самих таких *полей*.

В случае одного поля $\xi(\varphi)$ мы можем рассуждать так же, как и в случае процесса $\xi(\varphi)$ (см. [6]). А именно, рассмотрим соответствие

$$\widetilde{\varphi} \to \boldsymbol{\xi}(\varphi), \tag{2.29}$$

являющееся взаимнооднозначным линейным отображением функционального множества $\widetilde{D} = \{\widetilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda}),\ \varphi(\mathbf{x}) \in D\}$ в унитарное пространство $\mathfrak{H}$ комплексных случайных величин с конечным математическим ожиданием квадрата модуля (и скалярным произведением $(\xi, \gamma_l) = \mathbf{M}\xi\overline{\gamma_l}$). Воспользуемся тем, что $\widetilde{D}$ всюду плотно в гильбертовом пространстве $L^2(P_n; F) \equiv L^2$

(ср. доказательство теоремы 1′). В силу (2.7) соответствие (2.29) является изометрическим отображением множества $\widetilde{D}$ элементов L^2 (всюду плотного в L^2) в пространство $\mathfrak{H}$ и может быть однозначно продолжено до изометрического отображения T всего L^2 на подпространство $\mathfrak{H}_\xi$ пространства $\mathfrak{H}$, натянутое на совокупность величин $\{\xi(\varphi), \varphi \in D\}$. Обозначим теперь $Z(S)$ элемент $\mathfrak{H}_\xi$, отвечающий при отображении T характеристической функции $\chi_S(\boldsymbol{\lambda})$ F-измеримого множества $S \subset P_n$ (т. е. функции $\chi_S(\boldsymbol{\lambda})$, равной 1 на S и нулю вне S):

$$\chi_S(\boldsymbol{\lambda}) \to Z(S). \tag{2.30}$$

В таком случае $Z(S)$ будет вполне аддитивной случайной функцией множества $S \subset P_n$, причем (в силу изометричности T)

$$\mathrm{M} Z(S_1)\,\overline{Z(S_2)} = \int_{P_n} \chi_{S_1}(\boldsymbol{\lambda})\,\overline{\chi_{S_2}(\boldsymbol{\lambda})}\,F(d\boldsymbol{\lambda}) = F(S_1 \cdot S_2). \tag{2.31}$$

Такую функцию $Z(S)$ будем называть *случайной мерой, отвечающей мере* $F(S)$. Равенство (2.30) можно еще переписать в следующем виде:

$$f(\boldsymbol{\lambda}) \to \int_{P_n} f(\boldsymbol{\lambda})\,Z(d\boldsymbol{\lambda}) \tag{2.32}$$

при $f(\boldsymbol{\lambda}) = \chi_S(\boldsymbol{\lambda})$. Но (2.32), очевидно, также определяет линейное отображение L^2 в $\mathfrak{H}$, причем в силу (2.31) это отображение также будет изометричным. Следовательно, мы имеем два линейных изометрических отображения L^2 в $\mathfrak{H}$ (а именно, T и (2.32)), совпадающие на совокупности характеристических функций $\chi_S(\lambda)$; поскольку линейная оболочка этой совокупности функций плотна в L^2, то наши два отображения должны совпадать всюду на L^2. Сравнивая теперь (2.29) и (2.32), мы будем иметь

$$\xi(\varphi) = \int_{P_n} \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda})\,Z(d\boldsymbol{\lambda}). \tag{2.33}$$

Отсюда вытекает

Теорема 3. *Для любого обобщенного однородного случайного поля* $\xi(\varphi)$ *имеет место представление* (2.33), *где* $\widetilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda})$ *— преобразование Фурье функции* φ, *а* $Z(S)$ *— некоторая случайная мера, отвечающая спектральной мере* $F(S)$ *и однозначно определяемая полем* $\xi(\varphi)$.

Нам надо еще только доказать однозначность определения величин $Z(S)$. Для этого заметим, что если (2.33) имеет место для всех $\varphi \in D$, то в силу полноты $\widetilde{D}$ в L^2 преобразование T будет задаваться формулой (2.32) и для всех $f \in L^2$, откуда вытекает, что $Z(S)$ обязательно должно совпадать с образом функции $\chi_S(\boldsymbol{\lambda})$ при отображении T. Тем самым теорема 3 полностью доказана.

Представление поля $\xi(\varphi)$ в виде (2.33) мы будем называть спектральным разложением этого поля, а случайную меру $Z(S)$ — его спектральной случайной мерой.

Замечание 1. В случае вещественного поля $\xi(\varphi)$ случайная мера $Z(S)$ должна удовлетворять условию

$$Z(-S) = \overline{Z(S)}.$$

Замечание 2. Если $\mathbf{M}\xi(\varphi)$ дается формулой (2.6), то очевидно должно иметь место равенство

$$\mathbf{M}Z(S) = \begin{cases} 0 & \text{при } \mathbf{0} \bar{\in} S \\ m & \text{при } \mathbf{0} \in S \end{cases} \tag{2.34}$$

(так что, в частности, $\mathbf{M}Z(\mathbf{0}) = m$).

Замечание 3. Если в формуле (2.8) можно положить $p = 0$, то $e^{i\lambda \mathbf{x}} \in L^2$ при любом $\mathbf{x} \in R_n$. Следовательно, в этом случае существуют величины

$$\xi(\mathbf{x}) = \int_{P_n} e^{i\lambda \mathbf{x}} Z(d\boldsymbol{\lambda}). \tag{2.35}$$

Как легко видеть, величины $\xi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in R_n$ образуют обычное (не обобщенное) однородное поле. Подставляя (2.35) в (1.5) и сравнивая с (2.33), получаем, что наше поле $\xi(\varphi)$ здесь будет выражаться через $\xi(\mathbf{x})$ при помощи формулы (1.5), т. е. при $p = 0$ поле $\xi(\varphi)$ обязательно представимо в таком виде — обстоятельство, которое мы уже отмечали выше без доказательства.

В многомерном случае мы можем применить формулу (2.33) сразу к полю (2.22); при этом соответствующая спектральная случайная мера $Z_{\alpha_1, \ldots, \alpha_N}(S)$ будет линейно зависеть от параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ и спектральное разложение (2.33) для $\xi_{\alpha_1, \ldots, \alpha_N}(\varphi)$ сразу дает нам разложения такого вида для всех компонент вектора $\boldsymbol{\xi}(\varphi)$:

$$\boldsymbol{\xi}(\varphi) = \int_{P_n} \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda}) \mathbf{Z}(d\boldsymbol{\lambda}). \tag{2.36}$$

где $\mathbf{Z}(S) = \{Z_1(S_1), \ldots, Z_N(S)\}$, $Z_k(S)$, $k = 1, \ldots, N$ — некоторые случайные меры на P_n. Применяя теперь к $Z_{\alpha_1, \ldots, \alpha_N}(S) = \sum_k \alpha_k Z_k(S)$ формулу (2.31) и обозначая $\| \mathbf{M} Z_i(S_1) \overline{Z_j(S_2)} \| = \mathbf{M}\mathbf{Z}(S_1) \overline{\mathbf{Z}(S_2)}$, мы получаем равенство

$$\mathbf{M}\mathbf{Z}(S_1) \overline{\mathbf{Z}(S_2)} = \mathscr{F}(S_1 \cdot S_2), \tag{2.37}$$

так что имеет место следующая

Теорема 4. *Для любого многомерного обобщенного однородного случайного поля* $\boldsymbol{\xi}(\varphi) = \{\xi_1(\varphi), \ldots, \xi_N(\varphi)\}$ *имеет место разложение* (2.36), *где* $\mathbf{Z}(S) = \{Z_1(S), \ldots, Z_N(S)\}$ *— вектор случайных мер в* P_n, *удовлетворяющих равенству* (2.37).

В вещественном случае, разумеется, должны выполняться равенства $Z_i(\bar{S}) = \overline{Z_i(S)}$; кроме того, во всех случаях будет $\mathbf{M}Z_i(S) = m_i$ при $\mathbf{0} \in S$ и $\mathbf{M}Z_i(S) = 0$ при $\mathbf{0} \bar{\in} S$, где m_i — компоненты вектора $\mathbf{m}$. Далее ясно, что если в равенстве (2.26) можно положить $p = 0$, то

$$\boldsymbol{\xi}(\varphi) = \int_{R_n} \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{2.38}$$

где $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \{\xi_1(\mathbf{x}), \ldots, \xi_N(\mathbf{x})\}$ — обычное многомерное однородное поле в R_n (т. е. многомерное поле, для которого вектор $\mathbf{M}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \mathbf{m}$ и матрица

(2.28) не зависят от $\mathbf{x}$), задаваемое равенством

$$\xi(\mathbf{x}) = \int_{P_n} e^{i\lambda x}\, Z(d\boldsymbol{\lambda}). \tag{2.39}$$

В заключение параграфа остановимся еще на вопросе о *частных производных* однородного случайного поля. Как обычно, в теории обобщенных функций частную производную

$$\xi^{(k_1, \ldots, k_n)}(\varphi) = \frac{\partial^K \xi(\varphi)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \quad K = k_1 + \ldots + k_n, \tag{2.40}$$

обобщенного случайного поля $\xi(\varphi)$ мы определим соотношением:

$$\xi^{(k_1, \ldots, k_n)}(\varphi) = (-1)^K \xi(\varphi^{(k_1, \ldots, k_n)}), \quad \varphi^{(k_1, \ldots, k_n)}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^K \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}; \tag{2.41}$$

при этом, очевидно, любое такое поле будет иметь частные производные всех порядков, также являющиеся обобщенными случайными полями. Замечая теперь, что $\widetilde{\varphi}^{(k_1, \ldots, k_n)}(\boldsymbol{\lambda}) = (-i)^K \lambda_1^{k_1} \ldots \lambda_n^{k_n} \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda})$ (где $\widetilde{\varphi}$, как обычно, преобразование Фурье функции φ), мы в силу (2.7), (2.33) немедленно получаем следующую теорему:

Теорема 5. *Частная производная $\xi^{(k_1, \ldots, k_n)}(\varphi)$ однородного обобщенного случайного поля $\xi(\varphi)$ при любых $k_1, \ldots, k_n$ является также однородным обобщенным случайным полем, спектральная мера $F^{(k_1, \ldots, k_n)}(S)$ и спектральная случайная мера $Z^{(k_1, \ldots, k_n)}(S)$ которого связаны с соответствующими мерами $F(S)$, $Z(S)$ поля $\xi(\varphi)$ соотношениями*

$$F^{(k_1, \ldots, k_n)}(S) = \int_S \lambda_1^{2k_1} \ldots \lambda_n^{2k_n} F(d\boldsymbol{\lambda}), \quad Z^{(k_1, \ldots, k_n)}(S) = (i)^K \int_S \lambda_1^{k_1} \ldots \lambda_n^{k_n} Z(d\boldsymbol{\lambda}). \tag{2.42}$$

Из теоремы 5, в частности, легко выводится, что для того, чтобы частная производная $\xi^{(k_1, \ldots, k_n)}(\varphi)$ была обыкновенным (не обобщенным) случайным полем (т. е. полем типа (1.5)), необходимо и достаточно, чтобы соответствующая спектральная мера $F(S)$ удовлетворяла соотношению

$$\int_{P_n} \lambda_1^{2k_1} \ldots \lambda_n^{2k_n} F(d\boldsymbol{\lambda}) < \infty. \tag{2.43}$$

Ясно, что в таком случае в (2.8) можно положить $p = 0$, т. е. и исходное поле $\xi(\varphi)$ сводится с помощью формулы (1.5) к обыкновенному однородному полю $\xi(\mathbf{x})$, причем поле $\xi^{(k_1, \ldots, k_n)}(\mathbf{x})$, определяющее $\xi^{(k_1, \ldots, k_n)}(\varphi)$, здесь будет совпадать с частной производной $\partial^K \xi(\mathbf{x}) / \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}$, определяемой по полю $\xi(\mathbf{x})$ как соответствующий предел в среднем квадратичном (существование этого предела гарантируется условием (2.43)).

Отметим еще, что результаты (2.15), (2.17), (2.18), (2.27), (2.26), (2.35), (2.31), (2.37) этого параграфа, относящиеся к обыкновенным (не обобщенным) однородным полям, являются хорошо известными; еще в 1941 г. они использовались А. М. Обуховым [11] в теории турбулентности и затем многократно указывались и в механической и в математической литературе (см., например, [3] — [5], [12] — [15]).

3. Локально однородные случайные поля (поля с однородными приращениями)

Обобщенным локально однородным случайным полем (или иначе — случайным *полем с однородными приращениями*) мы будем называть непрерывный в смысле (1.4) случайный линейный функционал $\xi(\varphi)$, определенный на совокупности D_1 функций $\varphi \in D$, удовлетворяющих условию

$$\int_{R_n} \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0, \tag{3.1}$$

и такой, что при любых φ, φ_1, $\varphi_2 \in D_1$ и $y \in R_n$ математические ожидания (1.2) удовлетворяют условиям (2.2), (2.3).

Заметим, что если предположить, что функционал $\xi(\varphi)$ задается формулой (1.5), где $\xi(\mathbf{x})$ — непрерывная случайная функция точки, то, ограничиваясь лишь функциями φ из класса D_1, мы сможем определить значения $\xi(\mathbf{x})$ лишь с точностью до произвольной аддитивной константы. Случайное поле $\xi(\mathbf{x})$, определенное с точностью до аддитивной константы, можно рассматривать как совокупность случайных величин $\gamma_l(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x}) - \xi(\mathbf{0})$, $\gamma_l(\mathbf{0}) = 0$, или же (что здесь более удобно) как совокупность величин

$$\Delta_{\mathbf{r}}\xi(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x}) - \xi(\mathbf{x} - \mathbf{r}), \tag{3.2}$$

отвечающих всевозможным $\mathbf{x}$, $\mathbf{r} \in R_n$ (т. е. как поле в R_{2n}) и удовлетворяющих условию

$$\Delta_{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}\xi(\mathbf{x}) = \Delta_{\mathbf{r}_1}\xi(\mathbf{x}) + \Delta_{\mathbf{r}_2}\xi(\mathbf{x} - \mathbf{r}_1). \tag{3.3}$$

Учитывая еще условия (2.2) и (2.3), мы придем к следующему определению: случайное поле $\xi(\mathbf{x})$, определенное с точностью до константы, называется *обыкновенным* (необобщенным) *локально однородным полем*, если математические ожидания

$$\mathbf{M}\Delta_{\mathbf{r}}\xi(\mathbf{y}) = m(\mathbf{r}) \tag{3.4}$$

и

$$\mathbf{M}\Delta_{\mathbf{r}_1}\xi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\,\overline{\Delta_{\mathbf{r}_2}\xi(\mathbf{y})} = D(\mathbf{x}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \tag{3.5}$$

при всех $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2 \in R_n$ не зависят от $\mathbf{y}$. Математические ожидания (3.4) и (3.5) являются, очевидно, средним значением и корреляционной функцией поля $\Delta_{\mathbf{r}}\xi(\mathbf{x})$; иначе их еще называют *средним значением приращения* поля $\xi(\mathbf{x})$ и, соответственно, *структурной функцией* поля $\xi(\mathbf{x})$. Заметим еще, что в случае вещественного поля $\Delta_{\mathbf{r}}\xi(\mathbf{x})$ в силу тождества

$$(a-b)(c-d) = \frac{1}{2}[(a-d)^2 + (b-c)^2 - (a-c)^2 - (b-d)^2] \tag{3.6}$$

мы всегда можем выразить $D(\mathbf{x}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ через более простую функцию от одного переменного

$$\mathbf{M}|\Delta_{\mathbf{r}}\xi(\mathbf{x})|^2 = D(\mathbf{r}) \equiv D(\mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{r}), \tag{3.7}$$

также называемую структурной функцией поля $\xi(\mathbf{x})$; достаточно даже, чтобы

поле $\Delta_r\xi(\mathbf{x})$ было вещественным лишь в широком смысле (см. ниже замечание 2 к теореме 6).

Определение обыкновенного локально однородного поля впервые было дано в работе А. Н. Колмогорова [17], посвященной изучению локальных свойств развитой турбулентности*; с тех пор такие поля постоянно используются в статистической теории турбулентности (см., например, [18—20]). Тем не менее в математической литературе подобные поля до сих пор не рассматривались, несмотря на то, что соответствующее понятие для случая одного переменного (а именно, понятие случайного процесса со стационарными приращениями) было изучено еще в 1940 г. в работе А. Н. Колмогорова [23] (см. также [24], [2], [5]).

Сформулируем теперь основной результат корреляционной теории локально однородных полей:

Теорема 6. *Для любого обобщенного локально однородного случайного поля $\xi(\varphi)$ в R_n среднее значение $m(\varphi)$ и корреляционный функционал $B(\varphi_1, \varphi_2)$ могут быть представлены в виде*

$$m(\varphi) = i\mathbf{m}\cdot\nabla\widetilde{\varphi}(\mathbf{0}), \tag{3.8}$$

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{P_n^-} \widetilde{\varphi}_1(\boldsymbol{\lambda})\,\overline{\widetilde{\varphi}_2(\boldsymbol{\lambda})}\,F(d\boldsymbol{\lambda}) + \mathcal{A}\nabla\widetilde{\varphi}_1(\mathbf{0})\cdot\overline{\nabla\widetilde{\varphi}_2(\mathbf{0})}, \tag{3.9}$$

где $\mathbf{m} = \{m_1, \ldots, m_n\}$ *— постоянный вектор,* $\nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial\lambda_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\lambda_n}\right\}$ *— оператор градиента,* $\mathcal{A} = \|a_{ik}\|$ *— постоянная эрмитова неотрицательная матрица,* P_n^- *— пространство* P_n *векторов* $\boldsymbol{\lambda}$ *за вычетом «нулевой точки»* $\mathbf{0}$, $\widetilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda})$ *— преобразование Фурье функции* $\varphi(\mathbf{x})$ *и, наконец,* $F(S)$ *— мера в пространстве* P_n^- *такая, что для некоторого неотрицательного* p

$$\int_{P_n^-} \frac{\lambda^2 F(d\lambda)}{(1+\lambda^2)^{p+1}} < \infty. \tag{3.10}$$

Обратно, каждый линейный функционал вида (3.8) *является средним значением некоторого обобщенного локально однородного случайного поля, а всякий билинейный функционал вида* (3.9) *— корреляционным функционалом некоторого такого поля.*

Меру $F(S)$ будем называть *спектральной мерой* локально однородного поля $\xi(\varphi)$. Эта мера, вообще говоря, будет бесконечной. Однако для всех F-измеримых внутренних множеств P_n^- (т. е. для F-измеримых ограниченных множеств S, находящихся на конечном расстоянии от начала координат $\mathbf{0}$) значения $F(S)$ всегда будут конечными; в дальнейшем под *множествами* S из P_n^- всегда будут пониматься только такие множества.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что обычное доказательство того, что всякий линейный функционал $m(\varphi)$ в пространстве

* Точнее говоря, в работе [17] было сформулировано определение случайного поля, локально однородного в узком смысле (ср. сноску на стр. 294), из которого приведенное выше определение «в широком смысле» получается совершенно автоматически.

$D(T)$ бесконечно дифференцируемых функций на конечном n-мерном интервале T представим в виде (2.9), полностью приложимо и к функционалам в подпространстве $D_1(T)$ бесконечно дифференцируемых на том же интервале функций, удовлетворяющих условию (3.1). Но в таком случае из (2.2) будет следовать, что функционал $m(\varphi)$ представим в таком виде и для всех $\varphi \in D_1$, причем функция $g(\mathbf{x})$ здесь должна удовлетворять условию:

$$\int_{R_n} [g(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - g(\mathbf{x})] \frac{\partial^N \varphi(x)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} d\mathbf{x} = 0 \qquad (3.11)$$

при любых $\mathbf{y} \in R_n$ и $\varphi \in D_1$. Последнее равенство показывает, что $g(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - g(\mathbf{x})$ — это многочлен относительно $x_1, \dots, x_n$ (с коэффициентами, могущими зависеть от $y_1, \dots, y_n$), степень которого по x_j; $j=1, \dots, n$, не превосходит k_j. Следовательно, $g(\mathbf{x})$ — это многочлен относительно $x_1, \dots, x_n$, степень которого по x_j; $j = 1, \dots, n$, не превосходит $k_j + 1$, и из (2.9) после ряда дифференцирований по частям получается формула

$$m(\varphi) = \sum_{j=1}^{n} m_j \int_{R_n} x_j \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \qquad (3.12)$$

эквивалентная (3.8)

Для доказательства того, что каждый линейный функционал вида (3.8) является средним значением некоторого обобщенного локально однородного поля, достаточно рассмотреть поле $\xi(\varphi) = \mathbf{m} \cdot \nabla \widetilde{\varphi}(0)$, являющееся, очевидно, локально однородным.

Перейдем теперь к выводу формулы (3.9). Для этого воспользуемся тем, что если $\xi(\varphi)$—локально однородное случайное поле в R_n, а $\mathbf{r}_1$—фиксированный вектор, то линейный функционал

$$\xi_{\mathbf{r}_1}(\varphi) = \xi(\varphi - \tau_{\mathbf{r}_1}\varphi), \quad \varphi \in D, \quad \varphi - \tau_{\mathbf{r}_1}\varphi \in D_1 \qquad (3.13)$$

будет являться однородным случайным полем в R_n, зависящим от векторного параметра $\mathbf{r}_1$, причем N случайных полей $\{\xi_{\mathbf{r}_1}(\varphi), \dots, \xi_{\mathbf{r}_N}(\varphi)\}$ при любых $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N \in R_n$ будут составлять N-мерное однородное случайное поле. Следовательно, в силу теоремы 2

$$\mathbf{M}\xi_{\mathbf{r}_1}(\varphi_1)\overline{\xi_{\mathbf{r}_2}(\varphi_2)} = \int_{P_n} \widetilde{\varphi}_1(\boldsymbol{\lambda})\,\overline{\widetilde{\varphi}_2(\boldsymbol{\lambda})}\, F(d\boldsymbol{\lambda};\, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \qquad (3.14)$$

где $F(S;\, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ — комплексная медленно растущая по модулю функция множества S пространства P_n, зависящая от векторов $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, и такая, что при любом выборе S, целого положительного числа N, векторов $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ и комплексных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ выполняется неравенство

$$\sum_{k,\, l=1}^{N} F(S;\, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_l)\, \alpha_k \bar{\alpha}_l \geqslant 0 \qquad (3.15)$$

(так что, в частности, $F(S;\, \mathbf{r}, \mathbf{r})$ всегда является мерой).

Заметим теперь, что в силу линейности $\xi_{\mathbf{r}}(\varphi)$ и очевидного равенств

$\tau_{\mathbf{r}_1'}\tau_{\mathbf{r}_2''} = \tau_{\mathbf{r}_1'+\mathbf{r}_1''}$ мы будем иметь

$$\xi_{\mathbf{r}_1'+\mathbf{r}_1''}(\varphi) = \xi_{\mathbf{r}_1'}(\varphi) + \xi_{\mathbf{r}_1''}(\tau_{\mathbf{r}_1'}\varphi) = \xi_{\mathbf{r}_1''}(\varphi) + \xi_{\mathbf{r}_1'}(\tau_{\mathbf{r}_1''}\varphi). \tag{3.16}$$

Учитывая, что преобразования Фурье функций φ и $\tau_{\mathbf{r}}\varphi$ связаны соотношением $\widetilde{\tau_{\mathbf{r}}\varphi} = e^{-i\lambda\mathbf{r}}\widetilde{\varphi}$, из (3.16) и (3.14) немедленно получаем

$$\int_{P_n} \widetilde{\varphi}_1(\boldsymbol{\lambda})\,\overline{\widetilde{\varphi}_2(\lambda)}\,F(d\boldsymbol{\lambda};\ \mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_1'',\ \mathbf{r}_2) =$$

$$= \int_{P_n} \widetilde{\varphi}_1(\boldsymbol{\lambda})\,\overline{\widetilde{\varphi}_2(\boldsymbol{\lambda})}\,\{F(d\boldsymbol{\lambda};\ \mathbf{r}_1',\ \mathbf{r}_2) + e^{-i\lambda\mathbf{r}_1'}F(d\boldsymbol{\lambda};\ \mathbf{r}_1'',\ \mathbf{r}_2)\} =$$

$$= \int_{P_n} \widetilde{\varphi}_1(\boldsymbol{\lambda})\,\overline{\widetilde{\varphi}_2(\boldsymbol{\lambda})}\,\{F(d\boldsymbol{\lambda};\ \mathbf{r}_1'',\ \mathbf{r}_2) + e^{-i\lambda\mathbf{r}_1''}F(d\boldsymbol{\lambda};\ \mathbf{r}_1',\ \mathbf{r}_2)\}. \tag{3.17}$$

Так как здесь $\widetilde{\varphi}_1(\boldsymbol{\lambda})$ и $\widetilde{\varphi}_2(\boldsymbol{\lambda})$ — это преобразования Фурье двух произвольных функций из D, то из равенства средней и правой частей (3.17) вытекает, что для всех S, для которых определено $F(S;\ \mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_1'',\ \mathbf{r}_2)$

$$\int_S (1 - e^{-i\lambda\mathbf{r}_1''})\,F(d\boldsymbol{\lambda};\ \mathbf{r}_1',\ \mathbf{r}_2') = \int_S (1 - e^{-i\lambda\mathbf{r}_1'})\,F(d\boldsymbol{\lambda};\ \mathbf{r}_1'',\ \mathbf{r}_2). \tag{3.18}$$

Применив теперь формулу (3.16) к полю $\xi_{\mathbf{r}_2}(\varphi_2)$, аналогично получим

$$\int_S (1 - e^{-i\lambda\mathbf{r}_1''})(1 - e^{i\lambda\mathbf{r}_2''})\,F(d\boldsymbol{\lambda};\ \mathbf{r}_1',\ \mathbf{r}_2') =$$

$$= \int_S (1 - e^{-i\lambda\mathbf{r}_1'})(1 - e^{i\lambda\mathbf{r}_2'})\quad F(d\boldsymbol{\lambda};\ \mathbf{r}_1'',\ \mathbf{r}_2''). \tag{3.19}$$

Теперь уже нетрудно получить формулу (3.9). Пусть S — множество из P_n^-; обозначим

$$F(S) = \int_S \frac{F(d\boldsymbol{\lambda};\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)}{(1 - e^{-i\lambda\mathbf{r}_1})(1 - e^{i\lambda\mathbf{r}_2})}. \tag{3.20}$$

Согласно (3.19) функция $F(S)$ не зависит от выбора векторов $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и, следовательно, может быть определена для любого множества S из P_n^- (ибо S всегда можно разбить на части, для каждой из которых произведение $(1 - e^{-i\lambda\mathbf{r}_1})(1 - e^{i\lambda\mathbf{r}_2})$ не обращается в нуль при некотором выборе $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$). Из неотрицательности $F(d\boldsymbol{\lambda};\ \mathbf{r},\ \mathbf{r})$ вытекает, что функция $F(S)$ будет неотрицательной; при неограниченном приближении множества S к бесконечности или к точке $\mathbf{0}$ значение $F(S)$ может стремиться к бесконечности, однако только так, что выполняется неравенство (3.10). Таким образом, формулу (3.14) можно переписать в виде

$$\mathbf{M}\xi_{\mathbf{r}_1}(\varphi_1)\,\overline{\xi_{\mathbf{r}_2}(\varphi_2)} = \int_{P_n^-} \widetilde{\varphi}_1(\boldsymbol{\lambda})\,\overline{\widetilde{\varphi}_2(\boldsymbol{\lambda})}\,(1 - e^{-i\lambda\mathbf{r}_1})\,\overline{(1 - e^{-i\lambda\mathbf{r}_2})}\,F(d\boldsymbol{\lambda}) +$$

$$+ \widetilde{\varphi}_1(0)\,\overline{\widetilde{\varphi}_2(0)}\,F(0;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2), \tag{3.21}$$

где $F(S)$ — мера в P_n^-, удовлетворяющая условиям, указанным в формулировке теоремы 6, а $F(\mathbf{0}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ — числовая функция от векторов $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$.

Уточним еще вид этой последней функции. Из равенства левой и средней части (3.17) легко выводится, что функция $F(\mathbf{0}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ линейно зависит от $\mathbf{r}_1$; совершенно аналогично доказывается, что она линейна и относительно $\mathbf{r}_2$. Таким образом,

$$F(\mathbf{0}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathcal{A}\,\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2, \tag{3.22}$$

причем из неравенства (3.15) следует, что матрица $\mathcal{A}$ должна быть эрмитовской неотрицательной.

Если мы теперь обозначим

$$\varphi - \tau_{\mathbf{r}}\varphi = \varphi^{(\mathbf{r})}, \tag{3.23}$$

то равенства (3.21) и (3.22) можно будет переписать в виде:

$$\mathbf{M}\,\xi(\varphi_1^{(\mathbf{r}_1)})\,\overline{\xi(\varphi_2^{(\mathbf{r}_2)})} = \int\limits_{P_n^-} \widetilde{\varphi}_1^{(\mathbf{r}_1)}(\boldsymbol{\lambda})\,\overline{\widetilde{\varphi}_2^{(\mathbf{r}_2)}(\boldsymbol{\lambda})}\,F(d\boldsymbol{\lambda}) + \mathcal{A}\nabla\widetilde{\varphi}_1^{(\mathbf{r}_1)}(0)\cdot\overline{\nabla\widetilde{\varphi}_2^{(\mathbf{r}_2)}(0)}; \tag{3.24}$$

тем самым мы доказали формулу (3.9) для функций φ_1 и φ_2 вида (3.23). Отсюда немедленно следует, что эта формула будет верна и для случая, когда φ_1 и φ_2 являются линейными комбинациями или пределами линейных комбинаций функций вида (3.22); но так как функции такого вида и их линейные комбинации плотны в D_1, то формула (3.9) тем самым полностью доказана.

Доказательство того, что каждый билинейный функционал вида (3.9) является корреляционным функционалом некоторого локально однородного поля, может быть проведено совершенно аналогично соответствующему доказательству для обобщенных стационарных процессов (см. [6]). А именно, если $\varphi_1, \ldots, \varphi_N \in D_1$ и $B(\varphi_k, \varphi_l)$ задается формулой (3.9), то $\sum\limits_{k,l=1}^{N} B(\varphi_k, \varphi_l)\,\alpha_k\overline{\alpha}_l \geqslant 0$ для любых комплексных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$; поэтому мы можем определить совокупность многомерных нормальных распределений для комплексных случайных величин $\xi(\varphi)$, $\varphi \in D_1$ так, что $\mathbf{M}\,\xi(\varphi_1)\,\overline{\xi(\varphi_2)} = B(\varphi_1, \varphi_2)$ (и, например, $\mathbf{M}\,\xi(\varphi) \equiv 0$). Далее, исходя из билинейности $B(\varphi_1, \varphi_2)$, непосредственно проверяется, что $\mathbf{M}\,|\,\xi(c\varphi) - c\xi(\varphi)\,|^2 = 0$ для любых $\varphi \in D_1$ и комплексного числа c и что $\mathbf{M}\,|\,\xi(\varphi_1 + \varphi_2) - \xi(\varphi_1) - \xi(\varphi_2)\,|^2 = 0$ для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in D_1$, а также доказывается, что выполняется условие непрерывности (1.4). Следовательно, $\xi(\varphi)$ будет являться обобщенным локально однородным полем с корреляционным функционалом (3.9), что и требовалось доказать. Другое доказательство обратного утверждения теоремы 6 может быть дано с помощью теоремы 8 о спектральном разложении самого локально однородного поля.

Замечание 1. В случае вещественных локально однородных случайных полей из условий $m(\varphi) = \overline{m(\varphi)}$ и $B(\varphi_1, \varphi_2) = \overline{B(\varphi_1, \varphi_2)}$ немедленно вытекает, что вектор $\mathbf{m}$ должен быть вещественным, мера $F(S)$ — такой, что $F(-S) = F(S)$, а матрица $\mathcal{A}$ — вещественной симметрической и неотрицательной. Указанные условия относительно $\mathbf{m}$, $F(S)$ и $\mathcal{A}$ являются, разумеется, необходимыми и достаточными для того, чтобы равенства

$m(\overline{\varphi}) = \overline{m(\varphi)}$ и $B(\overline{\varphi_1}, \overline{\varphi_2}) = \overline{B(\varphi_1, \varphi_2)}$ имели место; само поле $\xi(\varphi)$ в этом случае естественно называть вещественным в широком смысле.

Замечание 2. Матрица $\mathcal{A}$ очевидно связана с вектором $\mathbf{m}$ условием, что матрица $\mathcal{A} - \mathbf{m}\overline{\mathbf{m}}$ должна быть неотрицательной; мера F при заданном $\mathbf{m}$ может быть совершенно произвольной.

Замечание 3. В случае обыкновенного (необобщенного) локально однородного поля $\xi(\mathbf{x})$ величины $m(\varphi)$ и $B(\varphi_1^{(\mathbf{r}_1)}, \varphi_2^{(\mathbf{r}_2)})$ (см. (3.23), (3.24)), очевидно, следующим образом могут быть выражены через среднее значение $m(\mathbf{r})$ приращения поля $\xi(\mathbf{x})$ и соответствующую структурную функцию $D(\mathbf{x}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$:

$$m(\varphi) = \int_{R_n} m(\mathbf{x})\, \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{3.25}$$

$$B(\varphi_1^{(\mathbf{r}_1)}, \varphi_2^{(\mathbf{r}_2)}) = \int_{R_n}\int_{R_n} D(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\, \varphi_1(\mathbf{x}_1)\, \overline{\varphi_2(\mathbf{x}_2)}\, d\mathbf{x}_1\, d\mathbf{x}_2. \tag{3.26}$$

Равенство (3.12) здесь означает, что

$$m(\mathbf{r}) = \mathbf{m}\cdot\mathbf{r}, \tag{3.27}$$

а (3.23), (3.24) — что

$$D(\mathbf{x}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int_{P_n^-} e^{i\boldsymbol{\lambda}\mathbf{x}}(1 - e^{-i\boldsymbol{\lambda}\mathbf{r}_1})(1 - e^{i\boldsymbol{\lambda}\mathbf{r}_2})\, F(d\boldsymbol{\lambda}) + \mathcal{A}\,\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2 \tag{3.28}$$

и, в частности,

$$D(\mathbf{r}) \equiv D(0; \mathbf{r}, \mathbf{r}) = 2\int_{P_n^-} (1 - \cos\boldsymbol{\lambda}\mathbf{r})\, F(d\boldsymbol{\lambda}) + \mathcal{A}\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} \tag{3.29}$$

(в вещественном случае функцию (3.28) всегда можно выразить через (3.29) при помощи тождества (3.6)). Нетрудно показать, что для того, чтобы равенства (3.28) и (3.29) имели смысл, неравенство (3.10) должно иметь место при $p = 0$. В самом деле, из (3.29) вытекает, что

$$\int_{|\mathbf{r}|=1} D(\mathbf{r})\, d\sigma(\mathbf{r}) = \int_{P_n} \Phi(\lambda)\, \frac{\lambda^2 F(d\lambda)}{1+\lambda^2} + A_0, \tag{3.30}$$

($d\sigma(\mathbf{r})$ — элемент площади сферы $|\mathbf{r}| = 1$), где $\Phi(\lambda)$ — непрерывная на полупрямой $0 \leqslant \lambda < \infty$ всюду положительная функция, стремящаяся при $\lambda \to \infty$ к положительному пределу (это есть интеграл по $(n-1)$-мерной единичной сфере $|\mathbf{r}| = 1$ от функции $\frac{2(1-\cos\lambda r)(1+\lambda^2)}{\lambda^2}$), а A_0 — неотрицательная постоянная (интеграл по той же сфере от $\mathcal{A}\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}$). Отсюда сразу следует, что $\Phi(\lambda) \geqslant b > 0$ (где $b = \min\limits_{0\leqslant\lambda<\infty} \Phi(\lambda)$) и, значит,

$$\int \frac{\lambda^2 F(d\lambda)}{1+\lambda^2} \leqslant \frac{1}{b}\int_{|\mathbf{r}|=1} D(\mathbf{r})\, d\sigma(\mathbf{r}), \tag{3.31}$$

т. е. действительно в (3.10) можно положить $p = 0$. Несколько ниже (см. замечание 3 к теореме 8) будет показано, что и обратно — если

в (3.10) можно положить $p=0$, то $\xi(\varphi)$ обязательно представимо в виде (1.5), где $\xi(\mathbf{x})$ (вместо $\xi(\mathbf{x})$ здесь, очевидно, можно писать $\xi(\mathbf{x})-\xi(\mathbf{a})=\Delta_{\mathbf{x}-\mathbf{a}}\xi(\mathbf{x})$, где $\mathbf{a}\in R_n$ — любое) — обыкновенное (не обобщенное) локально однородное поле, имеющее структурную функцию (3.28).

Существенным дополнением к теореме 6 является следующая

Теорема 6′. *В условиях теоремы 6 вектор* $\mathbf{m}$, *мера* $F(S)$ *и матрица* A *однозначно определяются полем* $\xi(\varphi)$ (*т. е. функционалами* $m(\varphi)$ *и* $B(\varphi_1, \varphi_2)$). *А именно*

$$m_j = m(\varphi_j);\ j=1, \ldots, n, \tag{3.8′}$$

и

$$F(S)=\lim_{m\to\infty} B(\varphi_S^{(m)}, \varphi_S^{(m)}),\ a_{ik} = \lim_{m\to\infty} B(\varphi_i^{(m)}, \varphi_k^{(m)}), \tag{3.9′}$$

где S — *произвольное множество из* P_n^-, $\varphi_j(\mathbf{x})$ — *произвольная функция из* D_1 *такая, что* $\int\limits_{R_n} x_i\varphi_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=\delta_{ij}$ (*здесь и ниже* δ_{ij} — *символ Кронекера*), $\varphi_S^{(m)}(\mathbf{x})$; $m=1, 2, \ldots$ — *последовательность функций из* D_1 *такая, что* $\widetilde{\varphi}_S^{(m)}(\boldsymbol{\lambda})\to\chi_S(\boldsymbol{\lambda})$ *при* $m\to\infty$ (*сходимость в смысле* $L^2(P_n^-, F)$) *и* $\varphi_i^{(m)}(\mathbf{x})$; $i=1, 2, \ldots, n$; $m=1, 2, \ldots$ — *последовательности функций из* D_1 *такие, что*

$$\frac{\partial\widetilde{\varphi}_i^{(m)}(0)}{\partial\lambda_j}=\delta_{ij}\ \text{ и что }\ \lim_{m\to\infty}\int_S \widetilde{\varphi}_i^{(m)}(\boldsymbol{\lambda})\,F(d\boldsymbol{\lambda})=0$$

для любого S *из* P_n^-.

Формулы (3.8′) и (3.9′), очевидно, немедленно следуют из (3.8) и (3.9), так что надо только доказать, что фигурирующие в условиях теоремы последовательности $\varphi_S^{(m)}(\mathbf{x})$ и $\varphi_i^{(m)}(\mathbf{x})$; $i=1, \ldots, n$, действительно существуют. Но для последовательности $\varphi_S^{(m)}(\mathbf{x})$ доказательство существования ничем не отличается от аналогичного доказательства для функционального пространства D (см. теорему 1′); что же касается последовательностей $\varphi_i^{(m)}(\mathbf{x})$, то здесь доказательство существования немного более сложно и нам будет удобно отложить его до стр. 312, где нам еще раз придется иметь дело с этими последовательностями.

Перейдем теперь к многомерному случаю. *Многомерным обобщенным локально однородным полем* (иначе — многомерным полем с однородными приращениями) называется многомерный случайный функционал $\boldsymbol{\xi}(\varphi)=\{\xi_1(\varphi), \ldots, \xi_N(\varphi)\}$, такой, что соответствующий вектор средних значений (2.19) и матрица корреляционных функционалов (2.20) при любых $y\in R_n$ и $\varphi, \varphi_1, \varphi_2\in D_1$ удовлетворяют условию (2.21). Как и в случае однородных полей, мы можем перейти от многомерного локально однородного поля $\boldsymbol{\xi}(\varphi)$ к одномерному полю (2.22), после чего из теоремы 6 легко находится общий вид математических ожиданий (2.19) и (2.20) для такого $\boldsymbol{\xi}(\varphi)$. Учитывая далее, что при доказательстве достаточности найденного представления функционалов $B_{ij}(\varphi_1, \varphi_2)$ нам придется потребовать, чтобы при любом целом положительном M, любых $\varphi_k\in D_1$; $k=1, \ldots, M$, и любых комплексных α_{ik}; $i=1, \ldots, N$; $k=1, \ldots, M$, выполнялось неравенство $\sum\limits_{i,j=1}^{N}\sum\limits_{k,l=1}^{M} B_{ij}(\varphi_k, \varphi_l)\alpha_{ik}\overline{\alpha}_{jl}\geqslant 0$, получаем следующий окончательный результат:

Теорема 7. *Для любого многомерного обобщенного локально однородного случайного поля* $\xi(\varphi)=\{\xi_1(\varphi), \ldots, \xi_N(\varphi)\}$ *в* R_n *вектор средних значений* $\mathbf{m}(\varphi)$ *и матрица корреляционных функционалов* $\mathcal{B}(\varphi_1, \varphi_2)$ *могут быть представлены в виде*

$$\mathbf{m}(\varphi) = i\mathcal{M}\nabla\widetilde{\varphi}(0), \tag{3.32}$$

$$\mathcal{B}(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{P_n^-} \widetilde{\varphi}_1(\boldsymbol{\lambda})\,\overline{\widetilde{\varphi}_2(\boldsymbol{\lambda})}\,\mathcal{F}(d\boldsymbol{\lambda}) + \mathfrak{A}\nabla\widetilde{\varphi}_1(0)\cdot\overline{\nabla\widetilde{\varphi}_2(0)}, \tag{3.33}$$

где

$$\mathcal{M} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{m}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{m}_N \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} m_{11} \ldots m_{1n} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ m_{N1} \ldots m_{Nn} \end{matrix} \right\| \tag{3.34}$$

— комплексная $(N \times n)$*-матрица,*

$$\mathcal{F}(S) = \| F_{ij}(S) \| \tag{3.35}$$

— $(N \times N)$*-матрица комплексных аддитивных функций множества пространства* P_n^- *таких, что при некотором неотрицательном* p *для всех* $i, j = 1, \ldots, N$

$$\int_{P_n^-} \frac{\lambda^2 \,|\, F_{ij}(d\lambda)\,|}{(1+\lambda^2)^{p+1}} < \infty \tag{3.36}$$

и что при любом S *матрица* $\mathcal{F}(S)$ *— эрмитова неотрицательная, а*

$$\mathfrak{A} = \| \mathcal{A}_{ij} \| \tag{3.37}$$

— $(N \times N)$*-матрица комплексных* $(n \times n)$*-матриц* $\mathcal{A}_{ij} = \| a_{kl}^{(ij)} \|$ *такая, что* $\mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}_{ji}^{*}$ *(звездочка означает переход к эрмитово сопряженной матрице) и что при любых комплексных* α_{ik}; $i = 1, \ldots, N$; $k = 1, \ldots, n$, *выполняется неравенство*

$$\sum_{i,j=1}^{N} \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}^{(ij)} \alpha_{ik} \overline{\alpha_{jl}} \geqslant 0. \tag{3.38}$$

Обратно, если $\mathbf{m}(\varphi)$ *задается формулой* (3.32), *где* $\mathcal{M}$ *имеет указанный смысл, то этот вектор является вектором средних значений некоторого многомерного локально однородного обобщенного поля; аналогично, если* $\mathcal{B}(\varphi_1, \varphi_2)$ *задается формулой* (3.33), *где* $\mathcal{F}(S)$ *и* $\mathfrak{A}$ *имеют указанный смысл, то эта матрица является матрицей корреляционных функционалов некоторого такого поля.*

Матрицу $\mathcal{F}(S)$ мы будем называть *спектральной матрицей* многомерного поля $\xi(\varphi)$.

Отметим еще, что из условия (3.38) немедленно следует, что при любых комплексных $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ матрица

$$\mathcal{A} = \sum_{i,j=1}^{N} \mathcal{A}_{ij} \alpha_i \overline{\alpha_j} \tag{3.38'}$$

должна являться неотрицательной (для доказательства этого достаточно положить $\alpha_{ik} = \alpha_i \beta_k$ в (3.38)). Однако встречающееся иногда в литера-

туре по теории случайных функций (см., например, [1], стр. 302, [3], стр. 105) утверждение о том, что и обратно — из неотрицательности матрицы (3.38′) при любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ вытекает и условие (3.38), в общем случае является ошибочным (см., в частности, пример на стр. 332).

Замечание 1. В вещественном случае матрица $\mathcal{M}$ является вещественной, функции $F_{ij}(S)$ таковы, что $F_{ij}(S) = \overline{F_{ij}(-S)}$ и матрицы $\mathcal{A}_{ij}$ вещественные и такие, что $\mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}'_{ji}$ (штрих означает транспонирование). При выполнении всех этих условий (и только в этом случае) $\mathbf{m}(\varphi) = \overline{\mathbf{m}(\varphi)}$ и $\mathcal{B}_{ij}(\varphi_1, \varphi_2) = \overline{B_{ij}(\varphi_1, \varphi_2)}$; процесс $\xi(\varphi)$ при этом мы будем называть вещественным в широком смысле.

Замечание 2. Матрица (3.37) связана с матрицей (3.34) тем условием, что если заменить каждую из матриц $\mathcal{A}_{ij}$ на $\mathcal{A}_{ij} - \mathbf{m}_i\bar{\mathbf{m}}_j$, то условие неотрицательности суммы (3.38) должно не нарушаться.

Замечание 3. В случае полей $\xi_j(\varphi)$; $\varphi = 1, \ldots, N$, вида (1.5) число p в (3.36) можно положить равным нулю и вместо матрицы корреляционных функционалов $\mathcal{B}(\varphi_1, \varphi_2)$ можно рассматривать матрицу структурных функций

$$\mathcal{D}(\mathbf{x}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \| D_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \| = \| \mathrm{M}\Delta_{\mathbf{r}_1}\xi_i(\mathbf{x}+\mathbf{y})\overline{\Delta_{\mathbf{r}_2}\xi_j(\mathbf{y})} \|, \quad (3.39)$$

которая в силу (3.33) должна иметь вид

$$\mathcal{D}(\mathbf{x}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int_{P_n^-} e^{i\lambda\mathbf{x}}(1 - e^{-i\lambda\mathbf{r}_1})(1 - e^{i\lambda\mathbf{r}_2})\mathcal{F}(d\lambda) + \mathfrak{A}\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2. \quad (3.40)$$

В частности для функции $D_{ij}(\mathbf{r}) = \mathrm{M}\Delta_{\mathbf{r}}\xi_i(\mathbf{y})\overline{\Delta_{\mathbf{r}}\xi_j(\mathbf{y})} = D_{ij}(\mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{r})$ мы получаем формулу

$$D_{ij}(\mathbf{r}) = 2\int_{P_n^-}(1 - \cos\lambda\mathbf{r})F_{ij}(d\lambda) + \mathcal{A}_{ij}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}. \quad (3.41)$$

Отметим, однако, что в многомерном случае (в отличие от одномерного) даже для вещественных полей функция $D_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, зависящая от трех переменных, вообще говоря, не может быть выражена через функции $D_{ij}(\mathbf{r})$ от одного переменного — тождество (3.6) здесь, разумеется, не может помочь. Можно, правда, воспользоваться следующим тождеством:

$$(a_i - b_i)(c_j - d_j) + (a_j - b_j)(c_i - d_i) = (a_i - d_i)(a_j - d_j) + (b_i - c_i)(b_j - c_j) - (a_i - c_i)(a_j - c_j) - (b_i - d_i)(b_j - d_j), \quad (3.6')$$

но оно в общем случае показывает лишь то, что для вещественных полей сумма $D_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + D_{ji}(\mathbf{x}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ может быть выражена через функции $D_{ij}(\mathbf{r})$. Лишь в том частном случае, когда поля $\Delta_{\mathbf{r}}\xi_i(\mathbf{x})$; $i = 1, \ldots, N$ все вещественны (хотя бы лишь в широком смысле) и функции $D_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ симметричны относительно индексов i, j при любых $\mathbf{x}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in R_n$ (т. е. когда функции множества $F_{ij}(S) = \overline{F_{ij}(-S)}$ таковы, что $F_{ij}(S) = F_{ji}(S) = \overline{F_{ji}(S)}$, т. е. все вещественные, а матрицы $\mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}'_{ji}$ — вещественные и симметрические), из (3.6′) вытекает, что функции $D_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ все могут быть выражены через $D_{ij}(\mathbf{r}) \equiv D_{ij}(\mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{r})$.

В дополнение к теореме 7 имеет место

Теорема 7′. *В условиях теоремы 7 матрицы* $\mathcal{M} = \| m_{ik} \|$, $\mathcal{F}(S) =$

$= \| F_{ij}(S) \|$ *и* $\mathfrak{A} = \| \mathcal{A}_{ij} \| = \| (a_{kl}^{(ij)}) \|$ *однозначно определяются полем* $\xi(\varphi)$, *а именно,*

$$m_{ik} = m_i(\varphi_k), \tag{3.32'}$$

и

$$F_{ij}(S) = \lim_{m \to \infty} B_{ij}(\varphi_S^{(m)}, \varphi_S^{(m)}), \quad a_{kl}^{(ij)} = \lim_{m \to \infty} B_{ij}(\varphi_k^{(m)}, \varphi_l^{(m)}), \tag{3.33'}$$

где функции $\varphi_k(\mathbf{x})$, $\varphi_S^{(m)}(\mathbf{x})$ *и* $\varphi_k^{(m)}(\mathbf{x})$ *имеют тот же смысл, что и в* (3.8'), (3.9').

Рассмотрим теперь вопрос о спектральном разложении самого локально однородного поля $\xi(\varphi)$. Аналогично (2.29) определим отображение

$$\widetilde{\varphi} \to \xi(\varphi), \tag{3.42}$$

являющееся взаимнооднозначным линейным отображением функционального множества $\widetilde{D}_1 = \{\widetilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda}),\ \varphi(\mathbf{x}) \in D_1\}$ в унитарное пространство $\mathfrak{H}$ случайных величин. Введем в рассмотрение еще гильбертово пространство $L^2(P_n, F, \mathcal{A}) \equiv L^2$ функций $\widetilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda})$ на P_n (и их пределов в смысле L^2) таких, что $\widetilde{\varphi}(0) = 0$, $\partial\widetilde{\varphi}(0)/\partial\lambda_i$; $i = 1, \ldots, n$, существуют и конечны и

$$\int_{P_n^-} |\widetilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda})|^2 F(d\boldsymbol{\lambda}) < \infty; \tag{3.43}$$

скалярное произведение в $L^2(P_n, F, \mathcal{A}) = L^2$ зададим формулой (3.9). В таком случае, очевидно, $\widetilde{D}_1 \subset L^2$. Нетрудно доказать также, что $\widetilde{D}_1$ плотно в L^2 (ср. в [6] аналогичное доказательство для пространств $\widetilde{D}$ и $L^2(P_n, F)$); отсюда, в частности, вытекает и существование в D_1 последовательностей функций $\varphi_k^{(m)}(\mathbf{x})$; $k = 1, \ldots, n$; $m = 1, 2 \ldots$ со свойствами, указанными в формулировке теоремы 6' (немного подробнее об этом мы еще скажем ниже). В силу (3.9) отображение (3.42) является изометрическим отображением множества $\widetilde{D}_1$ из L^2 в $\mathfrak{H}$; оно может быть однозначно продолжено до изометрического отображения T_1 всего пространства L^2 на подпространство $\mathfrak{H}_\xi$ пространства $\mathfrak{H}$, натянутое на совокупность величин $\{\xi(\varphi),\ \varphi \in D_1\}$. Обозначим теперь через $Z(S)$ элемент $\mathfrak{H}$, отвечающий при отображении T_1 характеристической функции $\chi_S(\boldsymbol{\lambda})$ F-измеримого множества S из P_n^-. Обозначим далее через a_k — элемент $\mathfrak{H}$, определяемый как предел (в смысле среднего квадратичного) последовательности элементов $a_k^{(m)}$; $m = 1, 2, \ldots$, являющихся образами при преобразовании T_1 функций $\widetilde{\varphi}_k^{(m)}$; $m = 1, 2, \ldots$, где

$$\widetilde{\varphi}_k^{(m)}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} -i\,\lambda_k & \text{при } |\boldsymbol{\lambda}| \leqslant \dfrac{1}{m}, \\ 0 & \text{при } |\boldsymbol{\lambda}| > \dfrac{1}{m}; \end{cases} \tag{3.44}$$

поскольку последовательность $\varphi_k^{(m)}(\boldsymbol{\lambda})$; $m = 1, 2, \ldots$ очевидно сходится в L^2 к некоторому элементу f_k (существование которого как раз и обеспечивает существование последовательности $\varphi_k^{(m)}(\mathbf{x})$, о которой идет речь в теореме 6': в качестве $\varphi_k^{(m)}(\mathbf{x})$ можно выбрать любую последовательность функций, преобразования Фурье которых сходятся к f_k в смысле

L^2), то ясно, что и $a_k^{(m)}$ при $m \to \infty$ будет сходиться в $\tilde{\mathfrak{H}}$. В таком случае $Z(S)$, очевидно, будет вполне аддитивной случайной функцией множества $S \in P_n^-$ такой, что

$$\mathbf{M}\, Z(S_1)\overline{Z(S_2)} = \int\limits_{P_n^-} \chi_{S_1}(\boldsymbol{\lambda})\overline{\chi_{S_2}(\boldsymbol{\lambda})}\, F(d\boldsymbol{\lambda}) = F(S_1 \cdot S_2) \tag{3.45}$$

(т. е. будет случайной мерой в P_n^-, отвечающей мере $F(S)$), а $\mathbf{a} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — комплексным случайным вектором таким, что

$$\mathbf{M}\, a_k \overline{Z(S)} = 0 \quad \text{при любых } k \text{ и } S \in P_n^- \tag{3.46}$$

и

$$\mathbf{M}\, a_k \overline{a_l} = a_{kl}. \tag{3.47}$$

Из самого определения величин $Z(S)$ и a_k вытекает, что для $f \in L^2$ вида

$$f = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{S_j}(\boldsymbol{\lambda}) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k = f(\boldsymbol{\lambda}) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k \tag{3.48}$$

где S_j — некоторые множества из P_n^-) отображение T_1 представимо в виде

$$f \to \int\limits_{P_n^-} f(\boldsymbol{\lambda})\, Z(d\boldsymbol{\lambda}) + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a}; \quad \boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}. \tag{3.49}$$

Но любая функция $\tilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda}) \in \tilde{D}_1$ может быть представлена как предел (в смысле сильной топологии в L^2) последовательности элементов вида (3.48), причем α_k здесь будут сходиться к умноженным на i частным производным $\frac{\partial \tilde{\varphi}(0)}{\partial \lambda_k}$, а $f(\boldsymbol{\lambda})$ будет сходиться в P_n^- к $\tilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda})$ в смысле среднего квадратичного по мере $F(d\boldsymbol{\lambda})$. Отсюда немедленно следует, что

$$\xi(\varphi) = \int\limits_{P_n^-} \varphi(\boldsymbol{\lambda})\, Z(d\boldsymbol{\lambda}) + i\mathbf{a} \cdot \nabla\tilde{\varphi}(\mathbf{0}). \tag{3.50}$$

Сформулируем этот результат в виде теоремы:

Теорема 8. *Для любого обобщенного локально однородного случайного поля* $\xi(\varphi)$ *имеет место представление* (3.50), *где* $\tilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda})$ — *преобразование Фурье функции* $\varphi(\mathbf{x})$, $Z(S)$ — *некоторая случайная мера в* P_n^-, *отвечающая мере* $F(S)$, *а* $\mathbf{a}$ — *случайный вектор, удовлетворяющий* (3.46) *и* (3.47). *Мера* $Z(S)$ *и вектор* $\mathbf{a}$ *однозначно определяются полем* $\xi(\varphi)$.

Утверждение об однозначности определения $Z(S)$ и $\mathbf{a}$, которое не было доказано выше, может быть получено вполне аналогично соответствующему доказательству для однородных полей и на нем можно не останавливаться.

Аналогично случаю однородных полей представление (3.50) мы будем называть *спектральным разложением локально однородного поля* $\xi(\varphi)$, а случайную меру $Z(S)$ — *случайной спектральной мерой этого поля*.

Замечание 1. В случае вещественного поля случайный вектор $\mathbf{a}$ также должен быть вещественным, а мера $Z(S)$ должна удовлетворять соотношению $Z(-S) = \overline{Z(S)}$.

Замечание 2. Из сравнения (3.50) с (3.8) вытекает, что

$$\mathbf{Ma} = \mathbf{m}, \quad \mathbf{M}Z(S) = 0. \tag{3.51}$$

Замечание 3. Если в формуле (3.10) можно положить $p = 0$, то $e^{i\lambda \mathbf{x}}(1 - e^{-i\lambda \mathbf{r}}) \in L^2$ при любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{r} \in R_n$; следовательно, здесь можно определить случайные величины

$$\Delta_{\mathbf{r}}\xi(\mathbf{x}) \equiv \xi(\mathbf{x}) - \xi(\mathbf{x} - \mathbf{r}) = \int\limits_{P_n^-} e^{i\lambda \mathbf{x}}(1 - e^{-i\lambda \mathbf{r}})\, F(d\boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}. \tag{3.52}$$

Как легко видеть, эти величины образуют обычное (необобщенное) локально однородное поле, через которое поле $\xi(\varphi)$ выражается при помощи формулы (1.5). При этом формулу (3.52) надо сперва переписать в виде следующей формулы относительно самого поля $\xi(\mathbf{x})$ (а не его приращений):

$$\xi(\mathbf{x}) = \int\limits_{P_n^-} (e^{i\lambda \mathbf{x}} - 1)\, F(d\boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + c; \tag{3.53}$$

здесь $c = \xi(0)$ — произвольная постоянная, которая, однако, не обязана быть случайной величиной (т. е. иметь какое-то распределение вероятностей).

В многомерном случае, когда $\xi(\varphi) = \{\xi_1(\varphi), \ldots, \xi_N(\varphi)\}$, $\varphi \in D_1$, мы можем применить теорему 8 к полю (2.22), после чего уже легко получается следующая

Теорема 9. *Для любого многомерного обобщенного локально однородного поля $\xi(\varphi) = \{\xi_1(\varphi), \ldots, \xi_N(\varphi)\}$, $\varphi \in D_1$ имеет место представление*

$$\xi(\varphi) = \int\limits_{P_n^-} \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda})\, \mathbf{Z}(d\boldsymbol{\lambda}) + i\mathcal{A}_0 \nabla \widetilde{\varphi}(\mathbf{0}), \tag{3.54}$$

где $\mathbf{Z}(S) = \{Z_1(S), \ldots, Z_N(S)\}$ — многомерная случайная мера на P_n^- такая, что

$$\mathbf{M}Z(S_1)\overline{Z(S_2)} = \mathscr{F}(S_1 \cdot S_2), \tag{3.55}$$

а

$$\mathcal{A}_0 = \left\| \begin{matrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_N \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{N1} & \cdots & a_{Nn} \end{matrix} \right\| \tag{3.56}$$

— $(N \times n)$-матрица комплексных случайных величин такая, что

$$\mathbf{M}\, a_{ij} \cdot \overline{Z_k(S)} \equiv 0, \quad \mathbf{M}\, a_{ik}\overline{a_{jl}} = a_{kl}^{(ij)}. \tag{3.57}$$

В вещественном случае матрица $\mathcal{A}_0$ будет вещественной, а меры $Z_i(S)$ все будут удовлетворять условию $Z_i(-S) = \overline{Z_i(S)}$; кроме того во всех случаях $\mathbf{M}\mathcal{A}_0 = \mathcal{M}$, $\mathbf{M}Z(S) = 0$. Далее ясно, что если в (3.10) можно положить $p = 0$, то поле $\xi(\varphi)$ будет представимо в виде (2.38), где $\xi(\mathbf{x})$ — обыкновенное (необобщенное) локально однородное поле, имеющее структурную матрицу (3.40); каждая компонента $\xi(\mathbf{x})$ допускает представление вида (3.53).

В заключение скажем еще несколько слов о производных локально однородного поля. Воспользовавшись определением (2.41), мы убедимся, что частная производная (2.40) будет функционалом на линейном функциональном пространстве таких функций φ, для которых $\frac{\partial^K \varphi}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \in D_1$. Но легко видеть, что во всех случаях, когда $K \geqslant 1$, это функциональное пространство совпадает с пространством D. Если еще учесть связь между преобразованиями Фурье функций φ и $\frac{\partial^K \varphi}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$, то немедленно получаем следующую теорему:

Теорема 10. *Частная производная* $\xi^{(k_1, \dots, k_n)}(\varphi)$ *локально однородного обобщенного случайного поля* $\xi(\varphi)$ *при любых* $k_1, \dots, k_n$ *таких, что* $k_1 + \dots + k_n \geqslant 1$, *является обобщенным однородным случайным полем, спектральная мера* $F^{(k_1, \dots, k_n)}(S)$ *и случайная спектральная мера* $Z^{(k_1, \dots, k_n)}(S)$ *которого при любом* $S \ni 0$ *связаны с соответствующими мерами* $F(S)$, $Z(S)$ *поля* $\xi(\varphi)$ *теми же соотношениями* (2.42), *что и в случае, когда поле* $\xi(\varphi)$ *является однородным, а при* $S = 0$ (*состоящем из одной нулевой точки*) *определяются из соотношений*

$$F^{(k_1, \dots, k_n)}(0) = \begin{cases} a_{jj} & \text{если } k_i = \delta_{ij} \\ 0 & \text{если } k_1 + \dots + k_n > 1, \end{cases}$$

$$Z^{(k_1, \dots, k_n)}(0) = \begin{cases} a_j & \text{если } k_i = \delta_{ij}, \\ 0 & \text{если } k_1 + \dots + k_n > 1. \end{cases}$$

Условие, необходимое и достаточное, чтобы частная производная $\xi^{(k_1, \dots, k_n)}(\varphi)$ была обыкновенным (необобщенным) однородным полем, здесь имеют тот же вид (2.43), что и в случае однородного поля $\xi(\varphi)$. При выполнении этих условий мы всегда можем в (3.10) положить $p = 0$, т. е. и исходное поле $\xi(\varphi)$ здесь будет полем типа (1.5). При этом поле $\xi^{(k_1, \dots, k_n)}(\mathbf{x})$, определяющее $\xi^{(k_1, \dots, k_n)}(\varphi)$, и здесь будет частной производной поля $\xi(\mathbf{x})$, т. е. пределом (в средне-квадратичном) отношения соответствующей конечной разности поля $\xi(\mathbf{x})$ к произведению приращений независимых переменных (напомним, что при $k_1 + \dots + k_n \geqslant 1$ указанная конечная разность поля $\xi(\mathbf{x})$ будет выражаться через величины (3.2), т. е. будет иметь смысл).

4. Однородные и изотропные случайные поля (скалярные и векторные)

Пусть G — группа всех ортогональных преобразований (вращений и отражений) в R_n. Обобщенное случайное поле $\xi(\varphi)$ в R_n называется *однородным и изотропным* (или подробнее — скалярным однородным и изотропным), если оно однородно и кроме того для любого $g \in G$

$$m(\varphi) = m(g\varphi), \quad B(\varphi_1, \varphi_2) = B(g\varphi_1, g\varphi_2), \tag{4.1}$$

где, как обычно,

$$g\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(g^{-1}\mathbf{x}). \tag{4.2}$$

В частном случае поля $\xi(\varphi)$ вида (1.5) эти условия будут выполняться

тогда и только тогда, когда поле $\xi(\mathbf{x})$ удовлетворяет условиям

$$m(\mathbf{x}) = m = \text{const}, \quad B(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = B(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \tag{4.3}$$

(или, что то же самое, если поле $\xi(\mathbf{x})$ однородно и $B(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = B(g\mathbf{x}_1, g\mathbf{x}_2)$ для любого $g \in G$); при выполнении (4.3) обыкновенное поле $\xi(\mathbf{x})$ мы также будем называть однородным и изотропным.

Первое из условий (4.1), очевидно, не является ограничением — в силу (2.6) оно выполняется для любого однородного случайного поля. Второе из этих условий более существенно — оно значительно ограничивает класс допустимых билинейных функционалов $B(\varphi_1, \varphi_2)$. А именно, имеет место следующая

Теорема 11. *Для того чтобы однородное случайное поле $\xi(\varphi)$ было однородным и изотропным, необходимо и достаточно, чтобы мера $F(S)$ в формуле (2.24) была инвариантной относительно вращений вокруг начала координат пространства P_n, т. е. такой, что*

$$F(S) = F(gS) \quad \textit{при любых} \quad S \subset P_n, \; g \in G. \tag{4.4}$$

Для того чтобы функционал $B(\varphi_1, \varphi_2)$ был корреляционным функционалом некоторого однородного и изотропного случайного поля $\xi(\varphi)$ в R_n, необходимо и достаточно, чтобы он был представим в виде

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^\infty \int_{R_n} \int_{R_n} \varphi_1(\mathbf{x}_1)\overline{\varphi_2(\mathbf{x}_2)}\, Y_n(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|\lambda)\, d\mathbf{x}_1\, d\mathbf{x}_2\, d\Phi(\lambda), \tag{4.5}$$

где

$$Y_n(t) = 2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(t)}{t^{\frac{n-2}{2}}} = 1 - \frac{t^2}{2\cdot n} + \frac{t^4}{2\cdot 4\cdot n(n+2)} - \dots \tag{4.6}$$

$\left(J_{\frac{n-2}{2}}\right.$ *— функция Бесселя порядка* $\left.\frac{n-2}{2}\right)$, *а* $\Phi(\lambda)$ *— вещественная неубывающая функция на* $[0, \infty)$, *такая, что для некоторого неотрицательного* p

$$\int_0^\infty \frac{d\Phi(\lambda)}{(1+\lambda^2)^p} < \infty. \tag{4.7}$$

Доказательство. То, что в случае однородного и изотропного поля $\xi(\varphi)$ мера $F(S)$ должна удовлетворять (4.4), немедленно следует из сопоставления второго из равенств (4.1) с (2.7′). Обратное утверждение также почти очевидно: поскольку $g\widetilde{\varphi} = \widetilde{g\varphi} = \widetilde{\varphi}(g^{-1}\boldsymbol{\lambda})$, то в силу (2.7)

$$B(g\varphi_1, g\varphi_2) = \int_{P_n} \widetilde{\varphi}_1(g^{-1}\boldsymbol{\lambda})\overline{\widetilde{\varphi}_2(g^{-1}\boldsymbol{\lambda})}\, F(d\boldsymbol{\lambda}) = \int_{P_n} \widetilde{\varphi}_1(\boldsymbol{\lambda})\overline{\widetilde{\varphi}_2(\boldsymbol{\lambda})}\, F(d\boldsymbol{\lambda}), \tag{4.8}$$

откуда видно, что из (4.4) следует (4.1).

Если выполняется (4.4), то в (2.7) мы можем перейти к сферическим координатам, положив $d\boldsymbol{\lambda} = d\sigma(\lambda)\cdot d\lambda$ и

$$F(d\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{\Omega_{n-1}(\lambda)}\, d\sigma(\lambda)\, d\Phi(\lambda), \quad \lambda = |\boldsymbol{\lambda}|, \tag{4.9}$$

где $\Omega_{n-1}(\lambda) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\lambda^{n-1}$ — площадь сферы радиуса λ в P_n, $d\sigma(\lambda)$ — элемент площади этой сферы и $d\Phi(\lambda)$ — F-мера сферического слоя $\lambda \leqslant |\boldsymbol{\lambda}| < \lambda + d\lambda$ пространства P_n (ясно, что формула (4.9) равносильна условию (4.4)). Но подинтегральная функция в (2.7) (где $\widetilde{\varphi}_1(\boldsymbol{\lambda})$ и $\widetilde{\varphi}_2(\boldsymbol{\lambda})$ мы теперь предполагаем замененными их явными выражениями через $\varphi_1(\mathbf{x}_1)$ и $\varphi_2(\mathbf{x}_2)$) зависит только от угла θ_1 между векторами $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ и $\boldsymbol{\lambda}$, в связи с чем под $d\sigma(\lambda)$ в (4.9) мы можем сразу понимать площадь шарового пояса $\theta \leqslant \theta_1 < \theta + d\theta$:

$$d\sigma(\lambda) = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}(\sin\theta)^{n-2}\,d\theta\cdot\lambda^{n-1}. \qquad (4.10)$$

Подставляя (4.9) и (4.10) в (2.7) и производя интегрирование по $d\sigma(\lambda)$ раньше, чем по $d\mathbf{x}_1$ и $d\mathbf{x}_2$, получаем формулу (4.5), где

$$Y_n(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^{\pi} e^{it\cos\theta}\sin^{n-2}\theta\,d\theta = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{2}{t}\right)^{\frac{n-2}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(t) \qquad (4.11)$$

(см. [27], формула **6. 412.** 6), что совпадает с (4.6); условие (2.8) при этом обращается в (4.7). Обратно — любой линейный функционал вида (4.5) при условиях (4.6), (4.7) является функционалом (2.7), отвечающим сферически симметричной мере (4.9), т. е. является корреляционным функционалом некоторого однородного и изотропного случайного поля.

Замечание 1. Из (4.4) видно, что любое однородное и изотропное поле в R_n с вещественным средним значением обязательно является вещественным в широком смысле.

Замечание 2. Разумеется, мы всегда можем считать, что $\Phi(0) = 0$ и что функция $\Phi(\lambda)$ непрерывна слева (последнее условие будет выполняться при принятом в доказательстве теоремы 11 определении этой функции). В таком случае ясно, что $\Phi(+0) \geqslant m$, где m — постоянная, фигурирующая в (2.6).

Замечание 3. В случае поля $\xi(\varphi)$ вида (1.5), т. е. при $p = 0$ в (4.7), формула (4.5) имеет особенно простой смысл. В самом деле, при $p = 0$ мы можем в (4.5) и интегрирование по $d\Phi(\lambda)$ произвести раньше, чем по $d\mathbf{x}_1$ и по $d\mathbf{x}_2$; при этом формула (4.5) показывает, что общий вид корреляционной функции $B(r)$ (см. (4.3)) обыкновенного однородного и изотропного поля $\xi(\mathbf{x})$ дается формулой

$$B(r) = \int_0^{\infty} Y_n(\lambda r)\,d\Phi(\lambda) \qquad (4.12)$$

(где $Y_n(t)$ определяется из (4.6)).

Замечание 4. Отметим, что при выводе формулы (4.5) мы использовали лишь инвариантность поля $\xi(\varphi)$ (т. е. функционалов $m(\varphi)$ и $B(\varphi_1, \varphi_2)$) относительно вращений в R_n, инвариантность относительно отражений при этом получается автоматически в качестве следствия инвариантности относительно вращений.

Функция $\Phi(\lambda)$ в (4.5) может быть определена по $B(\varphi_1, \varphi_2)$ с помощью теоремы 1′; согласно этой теореме для любой точки λ_0 непрерывности этой функции значение $\Phi(\lambda_0)$ (при условии, что принимается равенство $\Phi(0)=0$) находится из (2.7′)), если под множеством S понимать шар $|\boldsymbol{\lambda}| \leqslant \lambda_0$. Если помимо $\Phi(0)=0$ принять еще условие нормировки, определяющее $\Phi(\lambda)$ в ее точках разрыва (например, положить $\Phi(\lambda) = \Phi(\lambda - 0)$), то $\Phi(\lambda)$ по $B(\varphi_1, \varphi_2)$ будет определяться однозначно. В частном случае обыкновенных (необобщенных) полей мы можем явно выразить $\Phi(\lambda)$ через $B(r)$. Для этого надо воспользоваться формулой, выражающей $F(S)$ через $B(\mathbf{r})$ в случае однородного необобщенного случайного поля; заметив, что последняя формула символически может быть записана в виде:

$$F(d\boldsymbol{\lambda}') = F(\{\lambda_i' \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_i' + d\lambda_i';\ \ i = 1, \ldots, n\}) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{R_n} (e^{-i\mathbf{r}\boldsymbol{\lambda}'} d\boldsymbol{\lambda}')\, B(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}, \tag{4.13}$$

мы получим требуемый результат, проинтегрировав правую часть (4.13) по области $|\boldsymbol{\lambda}'| \leqslant \lambda$. После перехода к сферическим координатам в P_n, выполнения интегрирования по угловым переменным и последующего перехода к сферическим координатам в R_n с использованием для $d\sigma(r)$ формулы, аналогичной (4.10), мы придем к следующему выражению для $\Phi(\lambda)$:

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{2^{n-2}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int\limits_0^{\lambda}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\pi} e^{-ir\lambda' \cos\theta} (\lambda' r)^{n-1} B(r) \sin^{n-2}\theta\, d\theta\, dr\, d\lambda'. \tag{4.14}$$

Производя здесь сперва интегрирование по $d\theta$ (с использованием (4.11)), а затем по $d\lambda'$, мы окончательно получим формулу (λ — точка непрерывности $\Phi(\lambda)$):

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int\limits_0^{\infty} Y_{\frac{n}{2}}(r\lambda)\,(r\lambda)^{\frac{n}{2}} \frac{B(r)}{r}\, dr, \tag{4.15}$$

родственную (4.12).

Понятие однородного и изотропного поля в R_n допускает два различных многомерных обобщения. Прежде всего мы можем рассматривать многомерные однородные поля $\boldsymbol{\xi}(\varphi) = \{\xi_1(\varphi), \ldots, \xi_N(\varphi)\}$, для которых вектор $\mathbf{m}(\varphi)$ средних значений и матрица $\mathcal{B}(\varphi_1, \varphi_2)$ корреляционных функционалов (т. е. каждая компонента вектора $\mathbf{m}(\varphi)$ и каждый матричный элемент $\mathcal{B}(\varphi_1, \varphi_2)$ в отдельности) инвариантны относительно всех преобразований (4.2) их функциональных аргументов (в случае полей вида (1.5) это эквивалентно требованию, чтобы вектор $\mathbf{m} = \mathbf{M}\xi(\mathbf{x})$ был постоянным, а все элементы матрицы (2.28) зависели лишь от длины r вектора $\mathbf{r}$). Такие многомерные поля мы будем называть *многомерными однородными и изотропными скалярными полями* (точнее говоря, это есть совокупность N однородных и изотропных скалярных полей $\xi_1(\varphi), \ldots, \xi_N(\varphi)$, однородно и изотропно связанных между собой). С помощью обычного способа сведения многомерных случайных полей к полям одномерным

(см. (2.22)) легко показывается, что общий вид корреляционной матрицы такого многомерного однородного и изотропного скалярного поля дается формулой

$$B_{ij}(\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^\infty \int_{R_n} \int_{R_n} \varphi_1(\mathbf{x}_1)\overline{\varphi_2(\mathbf{x}_2)}\, Y_n'(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|\lambda)\, d\mathbf{x}_1\, d\mathbf{x}_2\, d\Phi_{ij}(\lambda), \tag{4.16}$$

где $Y_n(t)$ — функция (4.6), а $\Phi_{ij}(\lambda)$ — комплексные функции ограниченной вариации такие, что для некоторого неотрицательного p при всех $i, j = 1, \ldots, N$

$$\int_0^\infty \frac{d\,|\Phi_{ij}(\lambda)|}{(1+\lambda^2)^p} < \infty \tag{4.17}$$

и что матрица

$$\| \Phi_{ij}(\lambda + \Delta\lambda) - \Phi_{ij}(\lambda) \| \tag{4.18}$$

при любых $\lambda \geqslant 0$ и $\Delta\lambda > 0$ является эрмитовой неотрицательной; равносильным условием является условие инвариантности всех функций $F_{ij}(S)$ множества S (см. теорему 2) относительно вращений $g \in G$. Если в (4.17) можно положить $p = 0$, то все компоненты многомерного поля $\xi(\varphi)$ будут представимы в виде (1.5) и формулу (4.16) здесь можно будет заменить формулой

$$B_{ij}(r) = \int_0^\infty Y_n(r\lambda)\, d\Phi_{ij}(\lambda); \quad i, j = 1, \ldots, N; \tag{4.12'}$$

функция $\Phi_{ij}(\lambda)$ в этом случае определяется по $B_{ij}(r)$ с помощью формулы, отличающейся от (4.15) лишь наличием индексов i, j при $\Phi(\lambda)$ и при $B(r)$.

Наряду с приведенным определением можно сформулировать и другое, более общее, определение понятия многомерного однородного и изотропного случайного поля. Пусть $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$ представляет собой величину, N компонент которой при вращениях и отражениях пространства R_n линейно преобразуются между собой по закону, определяемому некоторым N-мерным представлением $U = \{\mathcal{U}_g,\ g \in G\}$ группы G (т. е. ξ является некоторым тензором в R_n). В таком случае N-мерное однородное поле $\xi(\varphi) = \{\xi_1(\varphi), \ldots, \xi_N(\varphi)\}$ естественно назвать *однородным и изотропным полем величины* ξ, если его вектор средних значений $\mathbf{m}(\varphi)$ и корреляционная матрица $\mathcal{B}(\varphi_1, \varphi_2)$ не меняются при преобразовании (4.2) функциональных аргументов этих функционалов и одновременном линейном преобразовании $\mathcal{U}_g$ компонент $\xi(\varphi)$, отвечающем вращению g. Иначе говоря, поле $\xi(\varphi)$ будет называться однородным и изотропным полем величины ξ (преобразующейся по представлению $U = \{\mathcal{U}_g,\ g \in G\}$), если $\mathbf{m}(\varphi)$ и $\mathcal{B}(\varphi_1, \varphi_2)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\mathbf{m}(\varphi) = \mathcal{U}_g \mathbf{m}(g\varphi), \quad \mathcal{B}(\varphi_1, \varphi_2) = \mathcal{U}_g \mathcal{B}(g\varphi_1, g\varphi_2)\, \mathcal{U}_g^* \tag{4.19}$$

(звездочка обозначает эрмитово сопряженную матрицу). В частном случае, когда N-мерное представление U является тождественным, т. е. сопоставляет всем $g \in G$ единичную $(N \times N)$-матрицу $\mathcal{E}$ (такое представ-

ление, разумеется, является приводимым: оно распадается на N одномерных представлений), мы снова приходим к введенному выше понятию многомерного однородного и изотропного скалярного поля.

Мы здесь не будем рассматривать задачу определения общего вида функционалов $\mathbf{m}(\varphi)$ и $\mathcal{B}(\varphi_1, \varphi_2)$, удовлетворяющих (4.19), для случая произвольного представления U группы G, а ограничимся лишь одним частным случаем — случаем векторных однородных и изотропных полей $\xi(\varphi)$ (полей n-мерных векторов ξ в R_n, для которых $\mathcal{U}_g = g$). Более общий класс однородных и изотропных случайных потоков (в нашей терминологии — однородных и изотропных поливекторных полей, т. е. полей антисимметрических тензоров произвольного ранга) рассмотрен в недавней статье Ито [16], в которой найдена формула, обобщающая на этот класс полей приведенную ниже формулу (4.25).

Основной результат теории однородных и изотропных векторных случайных полей мы сформулируем в виде следующей теоремы:

Теорема 12. *Для любого однородного и изотропного векторного случайного поля* $\xi(\varphi) = \{\xi_1(\varphi), \ldots, \xi_N(\varphi)\}$ *в* R_n *среднее значение* $\mathbf{m}(\varphi)$ *всегда тождественно равно нулю, а матрица корреляционных функционалов* $\mathcal{B}(\varphi_1, \varphi_2) = \| B_{ij}(\varphi_1, \varphi_2) \|$ *может быть представлена в виде*

$$
\begin{aligned}
B_{ij}(\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^\infty \int_{R_n} \int_{R_n} \varphi_1(\mathbf{x}_1) \overline{\varphi_2(\mathbf{x}_2)} \{ & Y_n^{(1)}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|\lambda) \chi_i \chi_j + \\
& + Y_n^{(2)}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|\lambda) \delta_{ij} \} \, d\mathbf{x}_1 \, d\mathbf{x}_2 \, d\Phi_1(\lambda) + \\
+ \int_0^\infty \int_{R_n} \int_{R_n} \varphi_1(\mathbf{x}_1) \overline{\varphi_2(\mathbf{x}_2)} \{ & Y_n^{(3)}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|\lambda) \chi_i \chi_j + \\
& + Y_n^{(4)}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|\lambda) \delta_{ij} \} \, d\mathbf{x}_1 \, d\mathbf{x}_2 \, d\Phi_2(\lambda),
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

где

$$
\chi = \{\chi_1, \ldots, \chi_n\} = \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \tag{4.21}
$$

и

$$
\begin{aligned}
Y_n^{(1)}(t) &= -2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \frac{J_{\frac{n+2}{2}}(t)}{t^{\frac{n-2}{2}}}, \quad Y_n^{(2)}(t) = 2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \frac{J_{\frac{n}{2}}(t)}{t^{n/2}}, \\
Y_n^{(3)}(t) &= 2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \frac{J_{\frac{n+2}{2}}(t)}{t^{\frac{n-2}{2}}}, \\
Y_n^{(4)}(t) &= 2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left[\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(t)}{t^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{J_{\frac{n}{2}}(t)}{t^{\frac{n}{2}}} \right],
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

а $\Phi_1(\lambda)$, $\Phi_2(\lambda)$ — *две вещественные непрерывные слева неубывающие функции на* $[0, \infty)$, *удовлетворяющие соотношениям*

$$
\Phi_1(0) = \Phi_2(0) = 0, \quad \Phi_1(+0) = \Phi_2(+0) \tag{4.23}
$$

и такие, что для некоторого неотрицательного p

$$\int_0^\infty \frac{d\Phi_i(\lambda)}{(1+\lambda^2)^p} < \infty;\ i = 1, 2. \tag{4.24}$$

Обратно, если $\Phi_1(\lambda)$ *и* $\Phi_2(\lambda)$ *— произвольные вещественные неубывающие функции на вещественной полуоси, удовлетворяющие* (4.24) *при некотором* $p \geqslant 0$, *то формулы* (4.20) — (4.22) *определяют матрицу корреляционных функционалов некоторого однородного и изотропного векторного случайного поля в* R_n.

Заметим, что $B_{ij}(\varphi_1, \varphi_2)$ согласно (4.20)—(4.22) зависит лишь от суммы $[\Phi_1(+0) - \Phi_1(0)] + (n-1)[\Phi_2(+0) - \Phi_2(0)]$. Поэтому мы всегда без ограничения общности можем потребовать, чтобы скачки в нуле функций $\Phi_1(\lambda)$ и $\Phi_2(\lambda)$ были равны друг другу (т. е., чтобы выполнялось (4.23)); можно также вместо этого потребовать, чтобы скачок в нуле той или другой из функций $\Phi_1(\lambda)$, $\Phi_2(\lambda)$ обратился в нуль.

Доказательство. Докажем прежде всего, что для n-мерного однородного поля $\xi(\varphi) = \{\xi_1(\varphi), \ldots, \xi_n(\varphi)\}$ условие (4.20) равносильно следующему условию: спектральная матрица $\mathscr{F}(S) = \|F_{ij}(S)\|$ этого поля при выборе в качестве S элементарного объема $d\boldsymbol{\lambda} = d\sigma(\lambda) \cdot d\lambda$ пространства P_n, записанного в сферической системе координат, должна представляться в виде:

$$F_{ij}(d\boldsymbol{\lambda}) = \frac{d\sigma(\lambda)}{\Omega_{n-1}(\lambda)} \{l_i l_j\, d\Phi_1(\lambda) + (\delta_{ij} - l_i l_j)\, d\Phi_2(\lambda)\} \tag{4.25}$$

(ср. (4.9)), где δ_{ij} имеет тот же смысл, что и в (4.21), а

$$\mathbf{l} = \{l_1, \ldots, l_n\} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{|\boldsymbol{\lambda}|}. \tag{4.26}$$

В самом деле, пусть (4.25) имеет место. Перейдем в формуле (2.24) (в которой $\widetilde{\varphi_1}(\boldsymbol{\lambda})$ и $\widetilde{\varphi_2}(\boldsymbol{\lambda})$ мы теперь считаем замененными на их явные выражения через $\varphi_1(\mathbf{x}_1)$ и $\varphi_2(\mathbf{x}_2)$) к сферической системе координат и произведем прежде всего интегрирование по $d\sigma(\lambda)$. Если мы учтем при этом, что

$$\int_{|\boldsymbol{\lambda}|=\lambda} e^{i(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{x})} l_i l_j\, d\sigma(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{|\boldsymbol{\lambda}|=\lambda} e^{i(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{x})}\, d\sigma(\lambda), \tag{4.27}$$

и воспользуемся формулой (4.11) и некоторыми известными свойствами функций Бесселя (имеющимися, например, в [27]), то мы легко получим формулу (4.20). Обратно, если (4.20) имеет место, то мы можем переписать эту формулу в виде (2.24), где $F_{ij}(d\boldsymbol{\lambda})$ определяется из (4.25).

Теперь уже нетрудно получить все результаты, указанные в формулировке теоремы. Прежде всего отметим, что из сравнения первого равенства (4.19) с (2.23) видно, что вектор $\mathbf{m}$ в (2.23) должен удовлетворять условию $g\,\mathbf{m} = \mathbf{m}$ (поскольку у нас теперь $^0\!/_g \equiv g$), т. е. должен оставаться на месте при любом вращении или отражении. Ясно, что это условие удовлетворяется тогда и только тогда, когда $\mathbf{m} = 0$. Переходя к второму равенству (4.19), сопоставим его с (2.24′); при этом мы убе-

димся, что

$$\mathscr{F}(S) = g\mathscr{F}(gS)\,g', \text{ т. е. } F_{ij}(S) = \sum_{k,l=1}^{n} g_{ik}g_{jl}F_{kl}(gS) \tag{4.28}$$

(где $\|g_{ik}\|$ — матрица преобразования g). Выберем в качестве S элементарный объем $d\boldsymbol{\lambda} = d\sigma(\lambda)\cdot d\lambda$, где $d\sigma(\lambda)$ — сферическая окрестность точки $\boldsymbol{\lambda}$ на сфере $|\boldsymbol{\lambda}| = \lambda$. Из (4.28) следует, что $F_{ll}(d\boldsymbol{\lambda}) \equiv \mathscr{F}(d\boldsymbol{\lambda})\,\mathbf{l}\cdot\mathbf{l} = F_{ij}(d\boldsymbol{\lambda})\,l_i l_j$, $\mathbf{l} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{|\boldsymbol{\lambda}|}$ (знак суммирования по дважды повторяющимся индексам мы, как обычно, будем опускать) будет скалярной функцией $d\boldsymbol{\lambda}$ такой, что $F_{ll}(d\boldsymbol{\lambda}) = F_{l_1 l_1}(d\boldsymbol{\lambda}_1)$ при $\mathbf{l}_1 = g\,\mathbf{l}$, $d\boldsymbol{\lambda}_1 = g\,d\boldsymbol{\lambda}$, $g \in G$, и следовательно,

$$F_{ll}(d\boldsymbol{\lambda}) = \frac{d\sigma(\lambda)}{\Omega_{n-1}(\lambda)}\,d\Phi_1(\lambda) \tag{4.29}$$

(ср. (4.9)). Введем теперь в P_n прямоугольную систему координат, первая ось которой направлена параллельно вектору $\boldsymbol{\lambda}$, а остальные оси располагаются в плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{\lambda}$; единичные векторы координатных осей этой системы обозначим через $\mathbf{l} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{|\boldsymbol{\lambda}|}, \mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_{n-1}$. В таком случае в силу (4.28) для величин $F_{k_i k_i}(d\boldsymbol{\lambda}) \equiv \mathscr{F}(d\boldsymbol{\lambda})\,\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{k}_i$ мы будем иметь равенство

$$F_{k_1k_1}(d\boldsymbol{\lambda}) = F_{k_2k_2}(d\boldsymbol{\lambda}) = \ldots = F_{k_{n-1}k_{n-1}}(d\boldsymbol{\lambda}) \tag{4.30}$$

(так как мы всегда можем при помощи вращения или отражения в P_n, оставляющего на месте элемент объема $d\sigma(\lambda)\cdot d\lambda$, перевести ось $\mathbf{k}_1$ в любую из осей $\mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_{n-1}$); поэтому вместо $F_{k_ik_i}(d\boldsymbol{\lambda})$; $i = 1, \ldots, n-1$, мы можем писать просто $F_{kk}(d\boldsymbol{\lambda})$. При этом ясно, что

$$F_{kk}(d\boldsymbol{\lambda}) = \frac{d\sigma(\lambda)}{\Omega_{n-1}(\lambda)}\,d\Phi_2(\lambda), \tag{4.31}$$

где $\Phi_2(\lambda)$ (как и $\Phi_1(\lambda)$) — монотонно неубывающая вещественная функция на $[0, \infty)$. Из того, что при помощи вращения или отражения g, оставляющего на месте $\mathbf{l}$ и $d\boldsymbol{\lambda} = d\sigma(\lambda)\,d\lambda$, возможно перевести ось $\mathbf{k}^i$ в ось $-\mathbf{k}_i$, немедленно вытекает равенство

$$F_{lk_i}(d\boldsymbol{\lambda}) = 0;\ i = 1, \ldots, n-1. \tag{4.32}$$

Кроме того мы можем добиться, чтобы при отражении g, переводящем $\mathbf{k}_i$ в $-\mathbf{k}_i$ и оставляющем на месте $\mathbf{l}$ и $d\boldsymbol{\lambda}$, ось $\mathbf{k}_j$ также оставалась на месте; следовательно,

$$F_{k_ik_j}(d\boldsymbol{\lambda}) = 0;\ i, j = 1, \ldots, n-1;\ i \neq j. \tag{4.33}$$

Итак, в системе координат с осями, направленными вдоль векторов $\mathbf{l}, \mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_{n-1}$, матрица $\mathscr{F}(d\boldsymbol{\lambda}))$ будет диагональной и ее диагональные элементы будут даваться формулами (4.29) и (4.31).

Переходя теперь к произвольной декартовой системе координат в P_n и учитывая, что $F_{ij}(d\boldsymbol{\lambda})$ в силу (4.28) является тензором, получаем формулу (4.25), которую нам и надо было доказать *. Условие (2.26)

* Заметим, что из сравнения (4.25) с (4.31) видно, что $(n-1)\,F_{kk}(d\lambda) = F_{ij}(d\lambda)\,(\delta_{ij} - l_i\,l_j)$ — соотношение, которое можно доказать и не используя (4.25).

при этом дает нам (4.24). Стоит еще указать, что в силу (4.28) $F_{ij}(0) = a \cdot \delta_{ij}$, где a — неотрицательная постоянная; этот результат также можно считать содержащимся в формуле (4.25), если потребовать, чтобы выполнялись соотношения (4.23). Тем самым показано, что для векторного однородного и изотропного случайного поля всегда имеет место соотношение (4.25), где $\Phi_1(\lambda)$ и $\Phi_2(\lambda)$ — неубывающие функции, удовлетворяющие (4.23) и (4.24); следовательно, корреляционные функционалы $B_{ij}(\varphi_1, \varphi_2)$ для такого поля всегда представимы в виде (4.20) — (4.22). Обратно, если $\Phi_1(\lambda)$ и $\Phi_2(\lambda)$ — неубывающие функции, удовлетворяющие (4.24), то формулы (4.20) — (4.22) определяют матрицу корреляционных функционалов однородного n-мерного поля $\xi(\varphi)$ со спектральной матрицей (4.25), а такое поле, очевидно, будет также и изотропным (в силу того, что функции $Y_n^{(1)}(t)$ и $Y_n^{(3)}(t)$ обращаются в нуль при $t = 0$ выполнения условий (4.23) здесь можно не требовать).

Замечание 1. Из (4.25) видно, что всякое однородное и изотропное векторное поле в R_n является вещественным в широком смысле.

Замечание 2. Случаю полей $\xi_i(\varphi)$; $i = 1, \ldots, n$, вида (1.5) отвечают функции $\Phi_1(\lambda)$ и $\Phi_2(\lambda)$ такие, что в (4.24) можно положить $p=0$. При этом последнем условии мы можем в (4.20) произвести интегрирование по $d\Phi_1(\lambda)$ и $d\Phi_2(\lambda)$ раньше, чем по $d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2$, после чего эта формула принимает вид

$$B_{ij}(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{R_n} \int_{R_n} \varphi_1(\mathbf{x}_1) \overline{\varphi_2(\mathbf{x}_2)} B_{ij}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2, \tag{4.34}$$

где

$$B_{ij}(\mathbf{r}) = \int_0^\infty \left\{ Y_n^{(1)}(r\lambda) \frac{r_i r_j}{r^2} + Y_n^{(2)}(r\lambda) \delta_{ij} \right\} d\Phi_1(\lambda) +$$

$$+ \int_0^\infty \left\{ Y_n^{(3)}(r\lambda) \frac{r_i r_j}{r^2} + Y_n^{(4)}(r\lambda) \delta_{ij} \right\} d\Phi_2(\lambda), \; r = |\mathbf{r}| \tag{4.35}$$

($\| B_{ij}(\mathbf{r}) \|$ — корреляционная матрица (2.28) поля $\xi(\mathbf{x})$). Условие изотропности поля $\xi(\mathbf{x})$ здесь можно сформулировать следующим образом: среднее значение $\mathbf{M}\xi(\mathbf{x}) = \mathbf{m}$ должно равняться нулю, а матрица $\| B_{ij}(\mathbf{r}) \|$ должна сохранять свой вид при применении вращения или отражения g к вектору $\mathbf{r}$ и одновременном линейном преобразовании величин $B_{ij}(\mathbf{r})$ по закону преобразования компонент тензора второго ранга. Отсюда вытекает, что функции $B_{ij}(\mathbf{r})$ должны быть представимы в виде

$$B_{ij}(\mathbf{r}) = [B_{ll}(r) - B_{kk}(r)] \frac{r_i r_j}{r^2} + B_{kk}(r) \delta_{ij}, \tag{4.36}$$

где $B_{ll}(r)$ и $B_{kk}(r)$ (продольная и поперечная корреляционные функции) имеют простой смысл, а именно

$$B_{ll}(r) = \mathbf{M}\xi_l(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \overline{\xi_l(\mathbf{x})}, \; B_{kk}(r) = \mathbf{M}\xi_k(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \overline{\xi_k(\mathbf{x})} \tag{4.36'}$$

($\xi_l(\mathbf{x})$ — проекция вектора $\xi(\mathbf{x})$ на направление $\mathbf{r}$, а $\xi_k(\mathbf{x})$ — проекция этого же вектора на некоторое направление, перпендикулярное $\mathbf{r}$); формула (4.36) хорошо известна из работ по статистической теории турбулентности (см.,

например, [10]). Сравнивая (4.36) с (4.35) и (4.22), мы для функций $B_{ll}(r)$ и $B_{kk}(r)$ от одного переменного легко получаем формулы

$$B_{ll}(r) = 2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left[\int_0^\infty \left(\frac{J_{\frac{n}{2}}(r\lambda)}{(r\lambda)^{n/2}} - \frac{J_{\frac{n+2}{2}}(r\lambda)}{(r\lambda)^{\frac{n-2}{2}}}\right) d\Phi_1(\lambda) + \right.$$

$$\left. + (n-1)\int_0^\infty \frac{J_{\frac{n}{2}}(r\lambda)}{(r\lambda)^{n/2}}\, d\Phi_2(\lambda)\right], \tag{4.37}$$

$$B_{kk}(r) = 2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left[\int_0^\infty \frac{J_{\frac{n}{2}}(r\lambda)}{(r\lambda)^{n/2}}\, d\Phi_1(\lambda) + \int_0^\infty \left(\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(r\lambda)}{(r\lambda)^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{J_{\frac{n}{2}}(r\lambda)}{(r\lambda)^{n/2}}\right) d\Phi_2(\lambda)\right],$$

где $\Phi_1(\lambda)$ и $\Phi_2(\lambda)$ — ограниченные неубывающие функции неотрицательного аргумента λ, которые всегда можно считать удовлетворяющими (4.23); эти формулы определяют общий вид продольной и поперечной корреляционных функций $B_{ll}(r)$ и $B_{kk}(r)$ однородного и изотропного обыкновенного (необобщенного) векторного случайного поля в R_n. Из (4.37) видно, в частности, что $B_{ll}(0) = B_{kk}(0) = n\Phi_1(+0)$.

Замечание 3. Отметим, что поскольку при $n \geqslant 3$ мы всегда можем перевести ось $\mathbf{k}_i$ в $-\mathbf{k}_i$ или же в $\mathbf{k}_j$, где $j \neq i$, при помощи вращения, оставляющего $\mathbf{l}$ и $d\boldsymbol{\lambda}$ на месте, и можем при помощи такого вращения перевести $\mathbf{k}_i$ в $\mathbf{k}_j$, а $\mathbf{k}_j$ в $-\mathbf{k}_i$, то при $n \neq 2$ для вещественного однородного векторного поля $\boldsymbol{\xi}(\varphi)$ мы получим тот же общий вид (4.20) — (4.22) функционалов $B_{ij}(\varphi_1, \varphi_2)$, если потребуем инвариантности нашего поля (выражающейся равенствами (4.19)) лишь относительно вращений g; инвариантность относительно отражений при этом получается автоматически. Случай $n = 2$ в этом отношении является исключительным на плоскости класс однородных векторных полей, инвариантных относительно вращений (но не отражений) значительно шире, чем класс таких полей, инвариантных относительно вращений и отражений. Общий вид матрицы $B_{ij}(\varphi_1, \varphi_2)$ для полей на плоскости, инвариантных лишь относительно вращений, зависит от трех функций $\Phi_1(\lambda)$, $\Phi_2(\lambda)$ и $\Phi_3(\lambda)$ (вместо двух). Мы здесь укажем только, что в случае обыкновенных (необобщенных) вещественных полей $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \{\xi_1(\mathbf{x}), \xi_2(\mathbf{x})\}$ инвариантных лишь относительно вращений, функции $B_{ij}(\mathbf{r})$ будут представляться в виде

$$B_{ij}(\mathbf{r}) = [B_{ll}(r) - B_{kk}(r)]\frac{r_i r_j}{r^2} + B_{kk}(r)\,\delta_{ij} + B_{lk}(r)\frac{\varepsilon_{im} r_m r_j + \varepsilon_{jm} r_m r_i}{r^2}, \tag{4.38}$$

где $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$, $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$, $B_{ll}(r)$ и $B_{kk}(r)$ имеют обычный смысл (4.36′), а $B_{lk}(r) = \mathbf{M}\,\xi_l(\mathbf{x}+\mathbf{r})\,\overline{\xi_k(\mathbf{x})}$; общий вид функций $B_{ll}(r)$ и $B_{kk}(r)$ дается теми же формулами (4.37) (с $n = 2$), а $B_{lk}(r)$ представляется в виде

$$B_{lk}(r) = \int_0^\infty J_2(\lambda r)\, d\Phi_3(\lambda), \tag{4.39}$$

где $\Phi_3(\lambda)$ — вещественная функция ограниченной вариации такая, что $|\Phi_3(d\lambda)|^2 \leqslant \Phi_1(d\lambda)\,\Phi_2(d\lambda)$; лишь в случае, когда $\Phi_3(\lambda) = \text{const}$, $B_{lk}(r)=0$, поле $\xi(\mathbf{x})$ будет инвариантно и относительно отражений.

Используя теорему 2′ нашей статьи, можно по $B_{ij}(\varphi_1, \varphi_2)$ определить и функции $\Phi_1(\lambda)$, $\Phi_2(\lambda)$; если считать эти функции непрерывными слева и удовлетворяющими (4.23), то они будут определяться по $B_{ij}(\varphi_1, \varphi_2)$ однозначно. Остановимся только на случае обыкновенных (необобщенных) полей, когда можно дать явные формулы, выражающие $\Phi_1(\lambda)$ и $\Phi_2(\lambda)$ через $B_{ll}(r)$ и $B_{kk}(r)$. Удобнее всего исходить при этом из формул (4.29) и (4.31). Учитывая, что $F_{ll}(d\boldsymbol{\lambda}) = F_{ij}(d\boldsymbol{\lambda})\,l_i l_j$, $(n-1)\,F_{kk}(d\boldsymbol{\lambda}) = F_{ij}(d\boldsymbol{\lambda})\,(\delta_{ij} - l_i l_j)$ и что $F_{ij}(d\boldsymbol{\lambda})$ выражается через $B_{ij}(r)$ при помощи формулы, аналогичной (4.13), легко получим

$$\Phi_1(\lambda) = \frac{1}{2^{n-2}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^{\lambda}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi} e^{-ir\lambda'\cos\theta}\,(\lambda' r)^{n-1}\,[B_{ll}(r)\,(1-\sin^2\theta) + \\ + B_{kk}(r)\sin^2\theta]\,\sin^{n-2}\theta\,d\theta\,dr\,d\lambda', \tag{4.40}$$

$$\Phi_2(\lambda) = \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \int_0^{\lambda}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi} e^{-ir\lambda'\cos\theta}(\lambda' r)^{n-1}\,[B_{ll}(r)\sin^2\theta + \\ + B_{kk}(r)\,(n-1-\sin^2\theta)]\,\sin^{n-2}\theta\,d\theta\,dr\,d\lambda'$$

(ср. (4.14)). Проводя здесь сперва интегрирование по $d\theta$ (с использованием (4.11)), а затем по $d\lambda'$, мы придем к следующим формулам (в предположении, что λ — точка непрерывности $\Phi_1(\lambda)$ и $\Phi_2(\lambda)$):

$$\Phi_1(\lambda) = \int_0^{\infty} Z_n^{(1)}(r\lambda)\,\frac{B_{ll}(r)}{r}\,dr + \int_0^{\infty} Z_n^{(2)}(r\lambda)\,\frac{B_{kk}(r)}{r}\,dr, \\ \Phi_2(\lambda) = \int_0^{\infty} Z_n^{(3)}(r\lambda)\,\frac{B_{ll}(r)}{r}\,dr + \int_0^{\infty} Z_n^{(4)}(r\lambda)\,\frac{B_{kk}(r)}{r}\,dr, \tag{4.41}$$

где

$$Z_n^{(1)}(t) = \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,t^{\frac{n}{2}}\,J_{\frac{n}{2}}(t) - Z_n^{(2)}(t),$$

$$Z_n^{(2)}(t) = \frac{n-1}{2^{\frac{n-2}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^t \tau^{\frac{n-2}{2}}\,J_{\frac{n}{2}}(\tau)\,d\tau, \tag{4.41}$$

$$Z_n^{(3)}(t) = \frac{1}{n-1}\,Z_n^{(2)}(t),\quad Z_n^{(4)}(t) = \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,t^{n/2}J_{n/2}(t) - Z_n^{(3)}(t).$$

В заключение сделаем еще два замечания, важных для приложения теории случайных полей к теории турбулентности. Прежде всего укажем, что если $\xi(\varphi)$ — однородное и изотропное векторное случайное поле, то $\operatorname{div}\xi(\varphi) = \frac{\partial\xi_1(\varphi)}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial\xi_n(\varphi)}{\partial x_n}$ (производные обобщенных полей

понимаются в смысле (2.41)) будет представлять собой одномерное скалярное однородное и изотропное случайное поле. Используя формулы (2.42) и (4.25), легко получить, что функция $\Phi(\lambda)$, характеризующая это скалярное однородное и изотропное поле, выражается через функции $\Phi_1(\lambda)$, $\Phi_2(\lambda)$, отвечающие векторному полю $\xi(\varphi)$, при помощи соотношения

$$\Phi(\lambda) = \int_0^\lambda \lambda'^2 \, d\Phi_1(\lambda'). \tag{4.42}$$

Таким образом, однородное и изотропное векторное поле $\xi(\varphi)$ будет соленоидальным (его дивергенция будет тождественно равна нулю) тогда и только тогда, когда в формуле (4.20) можно положить $\Phi_1(\lambda) = 0$. Далее рассмотрим скалярное одномерное однородное и изотропное случайное поле $\xi(\varphi)$ в R_n; в таком случае градиент этого поля $\operatorname{grad}\xi(\varphi) = \left\{\frac{\partial\xi(\varphi)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\xi(\varphi)}{\partial x_n}\right\}$ (где производные понимаются, как и выше) будет представлять собой векторное однородное и изотропное поле в R_n. Из сравнения (4.25) с (4.9) и (2.42) легко выводится, что функции $\Phi_1(\lambda)$ и $\Phi_2(\lambda)$, отвечающие этому векторному полю, выражаются через функцию $\Phi(\lambda)$, отвечающую скалярному полю $\xi(\varphi)$, следующим образом:

$$\Phi_1(\lambda) = \int_0^\lambda \lambda'^2 \, d\Phi(\lambda'), \quad \Phi_2(\lambda) \equiv 0. \tag{4.43}$$

Отсюда вытекает, что однородное и изотропное векторное поле $\xi(\varphi)$ будет потенциальным (будет являться градиентом некоторого скалярного такого поля) тогда и только тогда, когда в (4.20) можно положить $\Phi_2(\lambda) = 0$; при этом $\int_0^1 \frac{d\Phi_1(\lambda)}{\lambda^2} < \infty$. В следующем параграфе мы увидим, что ограничение на поведение $\Phi_1(\lambda)$ в нуле здесь возникло лишь из-за того, что мы рассматривали только однородные и изотропные потенциальные поля, являющиеся градиентами скалярного тоже однородного и изотропного поля.

Прежде, чем переходить к следующему параграфу отметим еще связь приведенных выше результатов об обыкновенных (необобщенных) однородных и изотропных полях с результатами некоторых ранее опубликованных работ. Укажем в первую очередь, что в силу известной теоремы об условиях, характеризующих корреляционные функции (см., например, [2], гл. II, теорема 3.1), формула (4.12) будет давать также общий вид положительно определенного ядра в R_n, зависящего лишь от расстояния между своими двумя аргументами; в этой последней связи она и была впервые получена в 1938 г. в работе И. Шенберга [28] (см. также М. Г. Крейн, [29]). Связь результата Шенберга с теорией скалярных однородных и изотропных случайных полей неоднократно отмечалась в литературе (см. [15], [12], [5], [4], [30]). В работах по статистической теории турбулентности рассматривались и векторные однородные и изотропные случайные поля в трехмерном пространстве R_3; в частности, в работе автора [12] в этой связи были выведены специальные случаи

формул (4.37) и (4.41) с $n=3$, получающиеся в предположении, что функции $\Phi_1(\lambda)$ и $\Phi_2(\lambda)$ обе вполне непрерывны (см. также более позднюю работу Мойала [13], в которой независимо были получены те же результаты). По поводу общих (обобщенных) векторных однородных и изотропных полей см. также работу Ито [16], о которой мы уже говорили раньше (см. стр. 320)

5. Локально однородные и локально изотропные случайные поля (скалярные и векторные)

Обобщенное локально однородное случайное поле $\xi(\varphi)$ в R_n называется *локально однородным и локально изотропным* (точнее — скалярным локально однородным и локально изотропным), если при любом $g \in G$ математические ожидания (1.2) удовлетворяют условиям (4.1). В частном случае локально однородного поля $\xi(\varphi)$ вида (1.5) условия (4.1) равносильны следующим: функции (3.4) и (3.5) должны быть таковы, что при любом $g \in G$

$$m(g\,\mathbf{r}) = m(\mathbf{r}),\quad D(g\,\mathbf{x};\ g\,\mathbf{r}_1,\ g\,\mathbf{r}_2) = D(\mathbf{x};\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2). \tag{5.1}$$

Соответствующие обыкновенные (необобщенные) локально однородные поля $\xi(\mathbf{x})$ мы также будем называть (скалярными) локально однородными и локально изотропными полями.

Приведенное здесь определение обыкновенного локально однородного и локально изотропного поля было впервые сформулировано в работе А. Н. Колмогорова [17]; как было показано в этой работе, такие поля находят существенные применения в статистической теории турбулентности (см. также [15], [18] — [20]).

Общий вид функционалов $m(\varphi)$ и $B(\varphi_1, \varphi_2)$ для локально однородного и локально изотропного поля $\xi(\varphi)$ дается следующей теоремой:

Теорема 13. *Для любого локально однородного и локально изотропного случайного поля $\xi(\varphi)$ среднее значение $m(\varphi)$ тождественно равно нулю, а корреляционный функционал представим в виде*

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{+0}^{\infty}\int_{R_n}\int_{R_n} \varphi_1(\mathbf{x}_1)\,\overline{\varphi_2(\mathbf{x}_2)}\,Y_n(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|\,\lambda)\,d\mathbf{x}_1\,d\mathbf{x}_2\,d\Phi(\lambda) + \\ + a\int_{R_n}\int_{R_n} \mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_2\,\varphi_1(\mathbf{x}_1)\,\overline{\varphi_2(\mathbf{x}_2)}\,d\mathbf{x}_1\,d\mathbf{x}_2, \tag{5.2}$$

где $Y_n(t)$ имеет тот же смысл, что и в равенстве (4.6), $\Phi(\lambda)$ — неубывающая функция на полуоси $0<\lambda<\infty$, удовлетворяющая при некотором неотрицательном p неравенству

$$\int_{+0}^{\infty} \frac{\lambda^2\,d\Phi(\lambda)}{(1+\lambda^2)^{p+1}} < \infty, \tag{5.3}$$

а a — неотрицательная константа. Обратно, всякий функционал вида (5.2), где $Y_n(t)$, $\Phi(\lambda)$ и a имеют указанные значения, является корре-

ляционным функционалом некоторого локально однородного и локально изотропного случайного поля.

Условие (5.3) показывает, что в отличие от случая изотропного поля функция $\Phi(\lambda)$ здесь может неограниченно убывать при $\lambda \to 0$; это обстоятельство, разумеется, связано с условием (3.1), гарантирующим обращение интеграла по $d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2$ в первом члене правой части (5.2) при $\lambda = 0$ в нуль по крайней мере второго порядка.

Доказательство. Заметим прежде всего, что теорему 13 в силу теоремы 6 можно переформулировать также следующим образом: для того, чтобы локально однородное случайное поле было локально однородным и локально изотропным, необходимо и достаточно, чтобы в равенстве (3.8) вектор $\mathbf{m}$ был нулевым вектором, а в равенстве (3.9) мера $F(S)$ в пространстве P_n^- была инвариантной относительно вращений вокруг начала координат (т. е. удовлетворяющей (4.4)) и матрица $\mathcal{A}$ была равна $a\mathcal{E}$, где $\mathcal{E} = \|\delta_{ik}\|$ — единичная матрица. В самом деле, при подстановке в (3.9) вместо $\mathcal{A}$ матрицы $a\mathcal{E}$, а вместо $F(d\boldsymbol{\lambda})$ — сферически симметричной меры (4.9), эта формула в силу (3.10) и (4.11) обращается в (5.2). После этого замечания наша теорема становится почти очевидной. Действительно, согласно (3.8) первое равенство (4.1) в рассматриваемом случае равносильно условию $g\mathbf{m} = \mathbf{m}$, показывающему, что $\mathbf{m} = 0$. Далее, в силу формул (3.9) из второго равенства (4.1) вытекают соотношения

$$F(S) = F(gS), \quad \mathcal{A} = g\mathcal{A}g', \tag{5.4}$$

показывающие, что

$$F(d\boldsymbol{\lambda}) = \frac{d\sigma(\lambda)}{\Omega_{n-1}(\lambda)} d\Phi(\lambda), \quad \mathcal{A} = a\mathcal{E}, \tag{5.5}$$

т. е. непосредственно приводящие к (5.2); неравенство (3.10) при этом обращается в (5.3), а условие неотрицательности $\mathcal{A}$ показывает, что $a \geqslant 0$. Обратно, любой функционал (5.2) может быть переписан в виде (3.9), если принять обозначения (5.5); отсюда видно, что при $a \geqslant 0$ и выполнении (5.3) такой функционал всегда будет являться корреляционным функционалом некоторого локально однородного и локально изотропного случайного поля.

Замечание 1. Так как мера (4.9) удовлетворяет равенству $F(S) = F(-S)$, а матрица $a\mathcal{E}$ является вещественной, то всякое локально однородное и локально изотропное поле обязательно является вещественным (в широком смысле).

Замечание 2. Показатель p в неравенстве (5.3) совпадает с соответствующим показателем в (3.10); поэтому случаю поля $\xi(\varphi)$ вида (1.5) отвечает функция $\Phi(\lambda)$ в (5.2), удовлетворяющая (5.3) при $p = 0$. Соответствующий вид структурных функций $D(\mathbf{x}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ и $D(r)$ (в силу (5.1) функция $D(\mathbf{r})$ здесь зависит лишь от $r = |\mathbf{r}|$) мы получим, подставив равенства (5.5) в (3.28) и (3.29); поскольку в вещественном случае функция (3.28) всегда может быть выражена через (3.29), мы можем ограничиться рассмотрением лишь этой последней функции. Согласно (3.29), (5.5) и (5.3) общий вид структурной функции $D(r)$ локально

однородного и локально изотропного (необобщенного) случайного поля $\xi(\mathbf{x})$ дается формулой:

$$D(r) = \int_{+0}^{\infty} [1 - Y_n(\lambda r)]\, d\Phi(\lambda) + ar^2, \tag{5.6}$$

где a — произвольная неотрицательная константа, а $\Phi(\lambda)$ — произвольная неубывающая функция на полуоси $0 < \lambda < \infty$ такая, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\, d\Phi(\lambda) < \infty. \tag{5.7}$$

Формула (5.6) еще в 1941 г. была получена Дж. Нейманом и И. Шенбергом [24] при решении одной специальный задачи геометрии гильбертова пространства, к которой, как нетрудно показать, может быть сведена задача о нахождении всех обыкновенных локально однородных и локально изотропных полей.

Замечание 3. При доказательстве теоремы 13 мы использовали лишь инвариантность поля $\xi(\varphi)$ относительно вращений в R_n; инвариантность относительно отражений при этом автоматически получается в качестве следствия.

Пример. Согласно (5.3) мы можем принять в качестве $\Phi(\lambda)$ степенную функцию

$$\Phi(\lambda) = -C\lambda^{-k},\ k < 2. \tag{5.8}$$

При $k \geqslant 0$ соответствующее локально однородное и локально изотропное поле $\xi(\varphi)$ будет полем типа (1.5) (т. е. будет сводиться к полю $\xi(\mathbf{x})$); при $k < 0$ оно будет по существу обобщенным полем. В силу формулы (5.6), если $\Phi(\lambda)$ имеет вид (5.8) с $0 < k < 2$ и $a = 0$, то структурная функция $D(r)$ равна:

$$D(r) = Ar^k,\ 0 < k < 2, \tag{5.9}$$

где

$$A = Ck \int_0^{\infty} \left[1 - 2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(t)}{t^{\frac{n-2}{2}}}\right] t^{-k-1} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{k}{2}\right)}{2^k \Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)} C \tag{5.10}$$

(последний результат можно вывести, например, из формулы 4.412.1 книги [27] при помощи аналитического продолжения). Таким образом, мы здесь приходим к важному классу локально однородных и локально изотропных случайных полей со степенной структурной функцией; в этот класс естественно включить и поле со структурной функцией

$$D(r) = ar^2 \tag{5.9}$$

(случай $k = 0$, $a > 0$; само поле $\xi(\mathbf{x})$ в этом случае в силу (3.53) будет иметь вид $\xi(\mathbf{x}) = c + \mathbf{b}\cdot\mathbf{x}$, где $\mathbf{Mb} = 0$, $\mathbf{M}b_i b_k = a\delta_{ik}$). Частный случай поля со структурной функцией (5.9), отвечающий $k = 1$, при дополнительном условии, что все конечномерные распределения для величин $\Delta_{\mathbf{r}}\xi(\mathbf{x})$ являются распределениями Гаусса, был подробно изучен П. Леви

[1] под названием брауновского движения с n параметрами; случаи $k = {}^2/_3$ и $k = {}^4/_3$ играют важную роль в статистической теории турбулентности (см., например, [15]).

Из теоремы 6′ немедленно следует, что константа a в формуле (5.2) однозначно определяется значениями функционала $B(\varphi_1, \varphi_2)$ (или в случае (5.7) — значениями структурной функции $D(r)$), а функция $\Phi(\lambda)$ определяется этими значениями с точностью до аддитивной постоянной и условий нормировки в точках разрыва (так что $\Phi(\lambda)$ будет определяться однозначно, если, например, мы условимся считать, что $\Phi(1) = 0$ и что $\Phi(\lambda)$ непрерывна слева: $\Phi(\lambda - 0) = \Phi(\lambda)$).

Градиент произвольного локально однородного и локально изотропного скалярного поля $\xi(\varphi)$, очевидно, будет являться векторным однородным и изотропным полем: в самом деле, в силу теоремы 10 $\operatorname{grad}\xi(\varphi) = \left\{\frac{\partial\xi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\xi}{\partial x_n}\right\}$ будет n-мерным одномерным полем в R_n с нулевым средним значением, спектральная мера которого представима в виде

$$F_{ij}(d\boldsymbol{\lambda}) = \frac{d\sigma(\lambda)}{\Omega_{n-1}(\lambda)}\lambda_i\lambda_j d\Phi(\lambda),\ F_{ij}(0) = a\cdot\delta_{ij},$$

т. е. является частным случаем меры (4.25) с $d\Phi_2(\lambda) = 0$, $d\Phi_1(\lambda) = \lambda^{-2}d\Phi(\lambda)$. Отсюда видно, что произвольное векторное однородное и изотропное случайное поле $\boldsymbol{\xi}(\varphi)$ будет потенциальным (т. е. будет являться градиентом некоторого скалярного, вообще [говоря, лишь локально однородного и локально изотропного, случайного поля) в том и только в том случае, когда $d\Phi_2(\lambda) = 0$; этот результат уточняет условия потенциальности векторных однородных и изотропных полей, указанные в предыдущем параграфе.

Как и в случае просто однородных и изотропных полей, понятие поля локально однородного и локально изотропного допускает два многомерных обобщения. Простейшее из них это понятие многомерного скалярного локально однородного и локально изотропного поля $\boldsymbol{\xi}(\varphi) = \{\xi_1(\varphi), \ldots, \xi_N(\varphi)\}$ (иначе говоря — совокупности N локально однородных и локально изотропных скалярных полей, локально однородно и локально изотропно связанных друг с другом); такое поле определяется как многомерное локально однородное поле, для которого все функционалы $m_i(\varphi)$; $i = 1, \ldots, N$ и $B_{ij}(\varphi_1, \varphi_2)$; $i, j = 1, \ldots, N$ не меняются при преобразовании $\varphi \to g\varphi$ в пространстве D_1. Ясно, что в этом случае должно выполняться равенство $\mathbf{m}(\varphi) = 0$ и функционалы $B_{ij}(\varphi_1, \varphi_2)$ должны быть представимы в виде (5.2) (с заменой $\Phi(\lambda)$ на $\Phi_{ij}(\lambda)$ и a на a_{ij}), где $\Phi_{ij}(\lambda)$ — функции ограниченной вариации такие, что $d\Phi(\lambda) = |d\Phi_{ij}(\lambda)|$ при всех $i, j = 1, \ldots, N$ удовлетворяют условию (5.3) и матрица (4.18) при любых $\lambda > 0$ и $\Delta\lambda > 0$ — эрмитова неотрицательная, а a_{ij} — комплексные числа такие, что $\|a_{ij}\|$ — эрмитова неотрицательная матрица. Более общее определение локально однородного и локально изотропного поля $\boldsymbol{\xi}(\varphi) = \{\xi_1(\varphi), \ldots, \xi_N(\varphi)\}$ величин ξ, преобразующихся по некоторому N-мерному представлению $U = \{\mathcal{U}_g,\ g \in G\}$ группы G, получится, если мы потребуем, чтобы вектор средних значений $\mathbf{m}(\varphi)$ и матрица корреляционных функционалов $\mathcal{B}(\varphi_1, \varphi_2)$ локально однородного

поля $\xi(\varphi)$ удовлетворяли соотношениям (4.19). Как и в предыдущем параграфе, мы здесь ограничимся рассмотрением лишь векторного представления U, для которого $\mathscr{U}_g \equiv g$; основной результат теории векторных локально однородных и локально изотропных случайных полей мы сформулируем в виде следующей теоремы:

Теорема 14. *Для любого векторного локально однородного и локально изотропного случайного поля* $\xi(\varphi) = \{\xi_1(\varphi), \ldots, \xi_n(\varphi)\}$ *в* R_n *вектор средних значений* $\mathbf{m}(\varphi)$ *и матрица корреляционных функционалов* $\|B_{ij}(\varphi_1, \varphi_2)\|$ *могут быть представлены в виде*

$$\mathbf{m}(\varphi) = m \int_{R_n} \mathbf{x}\varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned} B_{ij}(\varphi_1, \varphi_2) = {} & \int_{+0}^{\infty} \int_{R_n} \int_{R_n} \varphi_1(\mathbf{x}_1)\, \overline{\varphi_2(\mathbf{x}_2)}\, \{Y_n^{(1)}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|\lambda)\chi_i\chi_j + \\ & + Y_n^{(2)}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|\lambda)\delta_{ij}\}\, d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\Phi_1(\lambda) + \\ & + \int_{+0}^{\infty} \int_{R_n} \int_{R_n} \varphi_1(\mathbf{x}_1)\, \overline{\varphi_2(\mathbf{x}_2)}\, \{Y_n^{(3)}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|\lambda)\chi_i\chi_j + \\ & + Y_n^{(4)}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|\lambda)\delta_{ij}\}\, d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\Phi_2(\lambda) + \\ & + a_1\delta_{ij} \int_{R_n}\int_{R_n} \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 \varphi_1(\mathbf{x}_1)\, \overline{\varphi_2(\mathbf{x}_2)}\, d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 + a_2 \int_{R_n} x_i\varphi_1(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \int_{R_n} x_j \overline{\varphi_2(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x} + \\ & + a_3 \int_{R_n} x_j\varphi_1(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \int_{R_n} x_i \overline{\varphi_2(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{5.12}$$

где m *— комплексная постоянная,* a_1, a_2 *и* a_3 *— вещественные постоянные такие, что* $a_1 \geqslant 0$, $|a_3| \leqslant a_1$, $a_2 \geqslant -\frac{a_1 + a_3}{n}$, χ_i, δ_{ij} *и* $Y_n^{(1)}(t)$, $Y_n^{(2)}(t)$, $Y_n^{(3)}(t)$, $Y_n^{(4)}(t)$ *определяются из* (4.21) — (4.22), *а* $\Phi_1(\lambda)$, $\Phi_2(\lambda)$ *— две вещественные неубывающие функции на полуоси* $0 < \lambda < \infty$, *удовлетворяющие при некотором неотрицательном* p *неравенствам*

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 d\Phi_i(\lambda)}{(1+\lambda^2)^{p+1}} < \infty, \quad i = 1, 2. \tag{5.13}$$

Обратно, при любом постоянном m *формула* (5.11) *определяет вектор средних значений некоторого векторного локально однородного и локально изотропного случайного поля в* R_n, *а формула* (5.12) *при любых* a_1, a_2, a_3 *и* $\Phi_1(\lambda)$, $\Phi_2(\lambda)$ *таких, как указано выше, определяет матрицу корреляционных функционалов некоторого векторного локально однородного и локально изотропного случайного поля в* R_n.

Доказательство. Легко видеть, что формула (5.11) получается из (3.32), если положить

$$\mathscr{M} = m\mathscr{E}, \text{ т. е. } m_{ik} = m \cdot \delta_{ik}, \tag{5.14}$$

а (5.12) — из (3.33), если положить

$$F_{ij}(d\boldsymbol{\lambda}) = \frac{d\sigma(\lambda)}{\Omega_{n-1}(\lambda)} \{l_i l_j d\Phi_1(\lambda) + (\delta_{ij} - l_i l_j)\, d\Phi_2(\lambda)\} \tag{5.15}$$

$$a_{kl}^{(ij)} = a_1\delta_{ij}\,\delta_{kl} + a_2\delta_{ik}\delta_{jl} + a_3\delta_{il}\delta_{jk}. \tag{5.16}$$

При этом условие (3.36) относительно $F_{ij}(d\lambda)$ в силу (5.15) переходит в (5.13). Далее, так как согласно теореме 7 должно выполняться равенство $a_{kl}^{(ij)} = \overline{a_{lk}^{(ji)}}$, то постоянные a_1, a_2 и a_3 должны быть вещественными; после этого условие (3.38) дает:

$$a_1 \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}^2 + a_3 \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\alpha_{ji} \geqslant 0$$

при любых вещественных α_{ij}; $i, j = 1, \ldots, n$, что, как нетрудно видеть, равносильно условиям *

$$a_1 \geqslant 0,\ |a_3| \leqslant a_1,\ a_2 \geqslant -\frac{a_1 + a_3}{n}. \tag{5.17}$$

Таким образом нам остается только доказать, что условия (4.19) с $\mathscr{U}_g = g = \|g_{ik}\|$ в рассматриваемом случае равносильны (5.14) — (5.16). Но из результатов теорем 7 и 7′ вытекает, что (4.19) можно заменить следующими условиями относительно $\mathscr{M} = \|m_{ik}\|$, $F_{ij}(S)$ и $a_{kl}^{(ij)}$:

$$m_{ik} = g_{ij}g_{kl}m_{jl},\ F_{ij}(S) = g_{ik}g_{jl}F_{kl}(gS),$$

$$a_{kl}^{(ij)} = g_{ip}g_{jq}g_{kr}g_{ls}a_{rs}^{(pq)} \tag{5.18}$$

(по дважды повторяющимся индексам предполагается суммирование). Первое из этих условий означает, что m_{ik} — тензор второго ранга, не меняющий своего вида при вращениях и отражениях, т. е. что $m_{ik}x_iy_k$ является билинейным инвариантом двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Но так как единственным билинейным инвариантом является скалярное произведение (см. [31]), то тензор m_{ik} должен иметь вид [(5.14). Второе условие (5.18) совпадает с (4.28); как было показано в § 4, отсюда вытекает формула (5.15). Наконец, третье из этих условий означает, что $a_{kl}^{(ij)}$ является тензором четвертого ранга, сохраняющимся при вращениях и отражениях; согласно теории инвариантов группы вращений (см. [31]), отсюда немедленно следует формула (5.16). Тем самым теорема 14 полностью доказана.

Замечание 1. Из замечания 1 к теореме 7 видно, что для того, чтобы векторное локально однородное и локально изотропное поле $\xi(\varphi)$ было вещественным (в широком смысле), надо только, чтобы была вещественной постоянная m.

Замечание 2. В силу замечания 2 к теореме 7 необходимым и достаточным условием того, чтобы существовало поле $\xi(\varphi)$, имеющее одновременно вектор средних значений (5.11) и матрицу корреляцион-

* Отметим, что условие неотрицательности матрицы (3.38′) в данном случае сводится к двум условиям $a_1 \geqslant 0$, $a_1 + a_2 + a_3 \geqslant 0$, более слабым, чем условия (5.17).

ных функционалов (5.12), является выполнение неравенства

$$a_1 + a_2 + a_3 - |m|^2 \geqslant 0. \tag{5.19}$$

Замечание 3. Для того, чтобы все поля $\xi_i(\varphi)$, $i = 1, \ldots, n$, были представимы в виде (1.5), необходимо и достаточно, чтобы в (5.13) можно было положить $p = 0$. Условие локальной однородности и локальной изотропности поля $\xi(\varphi)$ в этом случае сводится к следующему условию относительно поля $\xi(\mathbf{x})$: вектор средних значений $\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \mathbf{M}\Delta_{\mathbf{r}}\xi(\mathbf{y})$ и структурная матрица $\|D_{ij}(\mathbf{x};\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)\| = \|\mathbf{M}\Delta_{\mathbf{r}_1}\xi_i(\mathbf{x}+\mathbf{y})\,\overline{\Delta_{\mathbf{r}_2}\xi_j(\mathbf{y})}\|$ этого последнего поля должны удовлетворять условиям

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) = g\mathbf{m}(g^{-1}\mathbf{r}),\quad \mathscr{D}(\mathbf{x};\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2) = g\mathscr{D}(g^{-1}\mathbf{x};\ g^{-1}\mathbf{r}_1,\ g^{-1}\mathbf{r}_2)\,g' \tag{5.20}$$

при любом $g \in G$. Обыкновенные (не обобщенные) поля $\xi(\mathbf{x}) = \{\xi_1(\mathbf{x}), \ldots, \xi_n(\mathbf{x})\}$, удовлетворяющие (5.20), также называются локально однородными и локально изотропными векторными полями; впервые они рассматривались в работе А. Н. Колмогорова [17], посвященной изучению локальной структуры турбулентности (см. также [15], [18] — [20]). В применении к таким полям формулы (5.11) и (5.12) обращаются в

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) = m\cdot\mathbf{r},$$

$$D_{ij}(\mathbf{x};\ \mathbf{r}',\ \mathbf{r}'') = \int_{+0}^{\infty}\{K_1(\mathbf{x},\ \mathbf{r}',\ \mathbf{r}'';\ \lambda)\,d\Phi_1(\lambda) + K_2(\mathbf{x},\ \mathbf{r}',\ \mathbf{r}'';\ \lambda)\,d\Phi_2(\lambda)\} +$$

$$+ a_1\delta_{ij}\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'' + a_2 r_i' r_j'' + a_3 r_j' r_i'', \tag{5.21}$$

где

$$K_1(\mathbf{x},\ \mathbf{r}',\ \mathbf{r}'';\ \lambda) = Y_n^{(1)}(x\lambda)\frac{x_i x_j}{x^2} - Y_n^{(1)}(x'\lambda)\frac{x_i' x_j'}{x'^2} - Y_n^{(1)}(x''\lambda)\frac{x_i'' x_j''}{x''^2} +$$

$$+ Y_n^{(1)}(x'''\lambda)\frac{x_i''' x_j'''}{x'''^2} + [Y_n^{(2)}(x\lambda) - Y_n^{(2)}(x'\lambda) - Y_n^{(2)}(x''\lambda) + Y_n^{(2)}(x'''\lambda)]\,\delta_{ij},$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{r}',\ \mathbf{x}'' = \mathbf{x} + \mathbf{r}'',\ \mathbf{x}''' = \mathbf{x} - \mathbf{r}' + \mathbf{r}'',$$

а $K_2(\mathbf{x},\ \mathbf{r}',\ \mathbf{r}'';\ \lambda)$ получается из $K_1(\mathbf{x},\ \mathbf{r}',\ \mathbf{r}'';\ \lambda)$ после замены $Y_n^{(1)}$ на $Y_n^{(3)}$ и $Y_n^{(2)}$ на $Y_n^{(4)}$ (ср. (3.27) и (3.28), (3.40); формула (5.21) получается из (3.40) при подстановке в нее результатов (5.15) и (5.16)). В частности для $D_{ij}(\mathbf{r}) = D_{ij}(0;\ \mathbf{r},\ \mathbf{r})$ мы получаем формулу:

$$D_{ij}(\mathbf{r}) = 2\int_{+0}^{\infty}\left\{[1 - Y_n^{(2)}(r\lambda)]\,\delta_{ij} - Y_n^{(1)}(r\lambda)\,\frac{r_i r_j}{r^2}\right\}d\Phi_1(\lambda) +$$

$$+ 2\int_{+0}^{\infty}\left\{[1 - Y_n^{(4)}(r\lambda)]\,\delta_{ij} - Y_n^{(3)}(r\lambda)\,\frac{r_i r_j}{r^2}\right\}d\Phi_2(\lambda) +$$

$$+ a_1\delta_{ij}r^2 + (a_2 + a_3)\,r_i r_j. \tag{5.22}$$

При этом совершенно аналогично выводу (4.36) доказывается формула

$$D_{ij}(\mathbf{r}) = [D_{ll}(r) - D_{kk}(r)]\,\frac{r_i r_j}{r^2} + D_{kk}(r)\,\delta_{ij}, \tag{5.23}$$

где $D_{ll}(r)$ и $D_{kk}(r)$ (продольная и поперечная структурные функции) определяются аналогично (4.36′), а именно

$$D_{ll}(r) = \mathbf{M}\,\overline{[\xi_l(\mathbf{x}+\mathbf{r}) - \xi_l(\mathbf{x})]^2},\quad D_{kk}(r) = \mathbf{M}\,\overline{[\xi_k(\mathbf{x}+\mathbf{r}) - \xi_k(\mathbf{x})]^2} \tag{5.24}$$

($\xi_l(\mathbf{x})$ и $\xi_k(\mathbf{x})$ здесь имеют тот же смысл, что и в (4.36′)); эта формула начиная с работы [17] широко применяется при изучении локально однородной и локально изотропной турбулентности. Подстановка (5.23) в (5.22) дает

$$D_{ll}(r) = \int_{+0}^{\infty}\left[\frac{2}{n} - 2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{J_{\frac{n}{2}}(r\lambda)}{(r\lambda)^{n/2}} - \frac{J_{\frac{n+2}{2}}(r\lambda)}{(r\lambda)^{\frac{n-2}{2}}}\right)\right]d\Phi_1(\lambda) +$$

$$+ (n-1)\int_{+0}^{\infty}\left[\frac{2}{n} - 2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\frac{J_{\frac{n}{2}}(r\lambda)}{(r\lambda)^{n/2}}\right]d\Phi_2(\lambda) + b_1 r^2,$$

$$D_{kk}(r) = \int_{+0}^{\infty}\left[\frac{2}{n} - 2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\frac{J_{\frac{n}{2}}(r\lambda)}{(r\lambda)^{n/2}}\right]d\Phi_1(\lambda) +$$

$$+ \int_{+0}^{\infty}\left[\frac{2(n-1)}{n} - 2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(r\lambda)}{(r\lambda)^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{J_{\frac{n}{2}}(r\lambda)}{(r\lambda)^{n/2}}\right)\right]d\Phi_2(\lambda) + a_1 r_2, \tag{5.25}$$

где $\Phi_1(\lambda)$ и $\Phi_2(\lambda)$ — произвольные неубывающие функции на полуоси $0 < \lambda < \infty$ такие, что

$$\int_0^{\infty}\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\,d\Phi_i(\lambda) < \infty;\quad i = 1,\ 2, \tag{5.26}$$

а a_1 и $b_1 = a_1 + a_2 + a_3$ — две произвольные неотрицательные постоянные; формулы (5.25) дают общий вид функций (5.24), полностью определяющих $D_{ij}(\mathbf{r})$.

В связи с тем, что общая формула (5.21) для $D_{ij}(\mathbf{x};\ \mathbf{r}',\ \mathbf{r}'')$ оказывается гораздо более сложной, чем общая формула для $D_{ij}(\mathbf{r})$, большое значение в теории векторных локально однородных и локально изотропных случайных полей приобретает вопрос об условиях, при которых первую из указанных функций можно выразить через вторую. Как было указано на стр. 311, для того чтобы это было возможным, достаточно, чтобы поле было вещественным (т. е. чтобы постоянная m была вещественной) и чтобы выполнялось равенство

$$D_{ij}(\mathbf{x};\ \mathbf{r}',\ \mathbf{r}'') = D_{ji}(\mathbf{x};\ \mathbf{r}',\ \mathbf{r}'') \tag{5.27}$$

(т. е., чтобы было $F_{ij}(S) = F_{ji}(S)$ и $a_{kl}^{(ij)} = a_{kl}^{(ji)}$). Но согласно (5.15) условие $F_{ij}(S) = F_{ji}(S)$ для векторного локально однородного и локально изотропного поля всегда выполняется; условие же $a_{kl}^{(ij)} = a_{kl}^{(ji)}$ в силу (5.16) сводится к условию

$$a_2 = a_3, \tag{5.28}$$

оказывающемуся, таким образом, единственным условием, требующимся для того, чтобы $D_{ij}(\mathbf{x};\ \mathbf{r}',\ \mathbf{r}'')$ можно было выразить через $D_{ij}(\mathbf{r})$ (т. е. через $D_{ll}(r)$ и $D_{kk}(r)$). Существенно отметить, что (5.28) всегда будет иметь место, если только поле $\xi(\mathbf{x})$ не содержит «линейной компоненты» вида $\mathcal{A}_0\mathbf{x}$ (где $\mathcal{A}_0$ фиксированная матрица); в самом деле, при этом условии, очевидно, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Последнее замечание позволяет ограничиться рассмотрением функций $D_{ij}(\mathbf{r})$ во всех случаях, когда $D_{ij}(\mathbf{x};\ \mathbf{r}',\ \mathbf{r}'') \to 0$ при $|\mathbf{x}| \to \infty$ и, в частности, во всех применениях теории векторных локально однородных и локально изотропных случайных полей к теории турбулентности*

Замечание 4. Нетрудно видеть, что для почти всех значений n (т. е. для почти любого числа измерений пространства R_n) результаты теоремы 14 могут быть получены без использования инвариантности поля $\xi(\varphi)$ относительно отражений g (из одной инвариантности относительно вращений). Исключением является случай $n = 2$ (поля на плоскости), где общий вид функционала $B_{ij}(\varphi_1,\ \varphi_2)$ для поля, инвариантного лишь относительно вращений, зависит от трех функций $\Phi_1(\lambda)$, $\Phi_2(\lambda)$, $\Phi_3(\lambda)$ и несколько констант a_i (ср. замечание 3 к теореме 12) и случай $n = 4$ (поля в четырехмерном пространстве), где общий вид $B_{ij}(\varphi_1,\ \varphi_2)$ для такого поля содержит еще дополнительный по сравнению с (5.12) член, отвечающий слагаемому $a_4 \cdot \varepsilon_{ijkl}$ (где ε_{ijkl} — антисимметрический тензор четвертого ранга) в (5.16).

Пример. Аналогично (5.8) рассмотрим случай, когда

$$\Phi_1(\lambda) = -C_1\lambda^{-k},\ \Phi_2(\lambda) = C_2\lambda^{-k},\ a_1 = a_2 = a_3 = 0,\ k < 2. \tag{5.29}$$

При $k > 0$ соответствующее векторное локально однородное и локально изотропное поле $\xi(\varphi)$ будет сводиться к обычному полю $\xi(\mathbf{x})$; согласно (5.25) здесь

$$D_{ll}(r) = A_1 r^k,\ D_{kk}(r) = A_2 r^k,\ 0 < k < 2, \tag{5.30}$$

где

$$A_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{k}{2}\right)}{2^k\Gamma\left(\frac{n+k}{2}+1\right)}\,[C_1(k+1) + C_2(n-1)],$$

---

* В заметке [17], положившей начало теории локально однородной и локально изотропной турбулентности, соотношение (5.27) для поля скоростей $\xi(\mathbf{x})$ турбулентного потока было приведено без всякого обоснования. Позже Бетчелором [19] была предпринята попытка доказать это соотношение; однако указанное им довольно искусственное доказательство не является удовлетворительным. Это доказательство как будто бы опирается на дополнительное предположение о соленоидальности поля $\xi(\mathbf{x})$, но на самом деле условие соленоидальности (см. ниже (5.33)) не имеет никакого отношения к условию (5.28), требующемуся для выполнения (5.27). Фактически основную роль в доказательстве Бетчелора играет неявно вводимое предположение о том, что поле $\xi(\mathbf{x})$ является не только локально однородным, но и просто однородным; разумеется, в этом специальном случае условие (5.27) будет выполняться (и, более того, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$), что можно крайне просто доказать без всякой ссылки на соленоидальность $\xi(\mathbf{x})$.

$$A_2 = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{k}{2}\right)}{2^k\Gamma\left(\frac{n+k}{2}+1\right)}[C_1 + C_2(n+k-1)]. \tag{5.31}$$

В этот же класс векторных полей со степенной структурной функцией естественно включить и поле, для которого $\Phi_1(\lambda) = \text{const}$, $\Phi_2(\lambda) = \text{const}$ и $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, т. е.

$$D_{ll}(r) = b_1 r^2, \quad D_{kk}(r) = b_1 r^2. \tag{5.30'}$$

Частный случай поля рассматриваемого здесь класса, отвечающий $k = {}^2/_3$ и $C_1 = 0$, играет очень важную роль в статистической теории турбулентности (см. [17] — [20], [15]).

Из теоремы 7′ немедленно следует, что константы a_1, a_2 и a_3 в формуле (5.12) однозначно определяются значениями функционалов $B_{ij}(\varphi_1, \varphi_2)$, а функции $\Phi_1(\lambda)$ и $\Phi_2(\lambda)$ определяются этими значениями с точностью до аддитивных постоянных и условий нормировки в точках разрыва.

Дивергенция векторного локально однородного и локально изотропного случайного поля очевидно является скалярным однородным и изотропным случайным полем. В самом деле, согласно теореме 10, $\operatorname{div}\xi(\varphi) = \frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial\xi_n}{\partial x_n}$ будет однородным полем, имеющим среднее значение $m(\varphi) = nm\tilde{\varphi}(0)$ и спектральную меру

$$F(d\boldsymbol{\lambda}) = \frac{d\sigma(\lambda)}{\Omega_{n-1}(\lambda)}\lambda^2 d\Phi_1(0), \quad F(0) = na_1 + n^2a_2 + na_3, \tag{5.32}$$

т. е. будет полем однородным и изотропным. Из (5.32) видно также, что условиями, необходимыми и достаточными для соленоидальности векторного локально однородного и локально изотропного поля $\xi(\varphi)$ (т. е. для того, чтобы дивергенция этого поля тождественно равнялась нулю), являются следующие условия:

$$\Phi_1(\lambda) = \text{const}, \quad a_1 + na_2 + a_3 = 0. \tag{5.33}$$

Эти условия находят применение в статистической теории турбулентности.

Поступила в редакцию
7. 5. 57

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Lévy, Processus stochastiques et mouvement brownien, Paris, 1948.
[2] Дж. Дуб, Вероятностные процессы, ИИЛ, М., 1956.
[3] A. Blanc—Lappiere, R. Fortet, Théorie des fonctions aléatoires, Paris, 1953.
[4] M. S. Bartlett, An introduction to stochastic processes, Cambridge, 1955.
[5] А. М. Яглом, Введение в теорию стационарных случайных функций, Успехи матем. наук., 7, № 5 (51) (1952), 3—168.
[6] K. Itô, Stationary random distributions, Mem. College Sci. Univ. Kyoto, Ser. A, 28, No. 3 (1954), 209—223.
[7] И. М. Гельфанд, Обобщенные случайные процессы, ДАН СССР, 100, № 5 (1955), 853—856.
[8] L. Schwartz, Théorie des distributions, I — II, Paris, 1950—51.

[9] G. I. Taylor, Statistical theory of turbulence, Proc. Roy. Soc., ser. A, **151**, No 873 (1935), 421—478.
[10] Th. Karman, L. Howarth, On the statistical theory of isotropic turbulence, Proc. Roy. Soc., ser. A, **164**, No 917 (1938), 192—215.
[11] А. М. Обухов, О распределении энергии в спектре турбулентного потока, Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., № 4—5 (1941), 453—466.
[12] А. М. Яглом, Однородная и изотропная турбулентность в вязкой сжимаемой жидкости, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., **12**, № 6 (1948), 501—522.
[13] J. E. Moyal, The spectra of turbulence in a compressible fluid; eddy turbulence and random noise, Proc. Cambridge Phil. Soc., **48**, № 2 (1952), 329—344.
[14] А. М. Обухов, Статистическое описание непрерывных полей, Труды Геофиз. ин-та АН СССР, № 24 (151) (1954), 3—42.
[15] А. М. Обухов. Вероятностное описание непрерывных полей, Укр. матем. журнал, **6**, № 1 (1954), 37—42.
[16] K. Ito, Isotropic random current, Proc. 3-d Berkeley Symposium on Math. Stat. and Probab., Berkeley and Los Angeles, vol. II, 1956, 125—132.
[17] А. Н. Колмогоров, Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса, ДАН СССР, **30**, № 4 (1941), 299—303.
[18] А. Н. Колмогоров, Рассеяние энергии при локально изотропной турбулент, ности, ДАН СССР, **32**, № 1 (1941), 19—21.
[19] G. K. Batchelor, Kolmogoroff's theory of locally isotropic turbulence, Proc. Cambr. Phil. Soc., **43**, No 4 (1947), 533—559.
[20] А. М. Обухов, А. М. Яглом, Микроструктура турбулентного потока, Прикл. матем. и мех., **15**, № 1 (1951), 3—26.
[21] И. Гальперин, Введение в теорию обобщенных функций, ИИЛ, М, 1954.
[22] Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, ИИЛ М., 1947.
[23] А. Н. Колмогоров, Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений, ДАН СССР, **26**, № 1 (1940) 6—9.
[24] J. Neumann, I. J. Schoenberg, Fourier integrals and metric geometry, Trans. Amer. Math. Soc., **50**, No 2 (1941), 226—251.
[25] А. М. Яглом, М. С. Пинскер, Случайные процессы со стационарными приращениями n-го порядка, ДАН СССР, **90**, № 5 (1953), 731—734.
[26] А. М. Яглом, Корреляционная теория процессов со случайными стационарными n-ми приращениями, Матем. сб., **37 (79)**, № 1 (1955), 141—196.
[27] И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гостехиздат, М., 1951.
[28] I. J. Schoenberg, Metric spaces and completely monotone functions, Ann. Math., **39**, No 4 (1938), 811—841.
[29] М. Г. Крейн, Эрмитово-положительные ядра на однородных пространствах, Укр. мат. журнал, № 4 (1949), 64—98; № 1 (1950), 10—59.
[30] P. Faure, Sur quelques résultats rélatifs aux fonctions aléatoires stationnaires isotropes introduites dans l'étude expérimentale de certains phénomènes de fluctuations, C. R. Acad. Sci., **224**, No 7 (1957), 842—844.
[31] Г. Вейль, Классические группы, ИИЛ, М., 1947.

CERTAIN TYPES OF RANDOM FIELDS IN n-DIMENSIONAL SPACE SIMILAR TO STATIONARY STOCHASTIC PROCESSES

A. M. YAGLOM (*MOSCOW*)

(*Summary*)

The purpose of this paper is to establish a spectral theory for certain types of random fields and random generalized fields (multidimensional random distributions) in the Euclidian n-space R_n similar to the well-known spectral theory for stationary random processes.

Let D denote the Schwartz space of all complex-valued C_∞-functions $\varphi(\mathbf{x})$ defined on R_n whose carrier is compact. Following Itô [6] and Gelfand [7] we shall call the random linear functional $\xi(\varphi)$ on D satisfying (1.4) the random generalized field. We can identify a continuous random field $\xi(\mathbf{x})$ on R_n with a random generalized field (1.5) and therefore we can consider the ordinary random fields $\xi(\mathbf{x})$ as special cases of random generalized fields.

We shall only deal with the first moment $m(\varphi)$ and the second moment $B(\varphi_1, \varphi_2)$ of the random generalized field $\xi(\varphi)$ and shall call them a mean value functional and a covariance functional of this field. For an ordinary random field the mean value and covariance function defined by (1.1) play a similar role.

The random generalized field $\xi(\varphi)$ is called homogeneous if its mean value functional $m(\varphi)$ and covariance functional $B(\varphi_1, \varphi_2)$ are invariant under all shift transformations in the space D, i. e. if the relations (2.2) and (2.3) hold true. The theory of this homogeneous random generalized field, which is very similar to the Itô's theory of a stationary random distribution [6], is treated in section 2. The main results of the section concern the spectral representation of the covariance functional of such fields and of random generalized fields themselves.

Let D_1 denote the subspace of the space D consisting of all functions $\varphi(x)$ satisfying (3.1). The continuous linear functional $\xi(\varphi)$ on D_1 is called a locally homogeneous random generalized field if its mean value functional $m(\varphi)$ and its covariance functional $B(\varphi_1, \varphi_2)$ are invariant under all shift transformations in D_1. The locally homogeneous random fields mentioned above are treated in section 3. In this section we obtain the spectral representation of a covariance functional of the locally homogeneous random generalized field and the spectral representation of this field itself; these results generalize the spectral theory for random processes with stationary increments.

The homogeneous random generalized field is called homogeneous and isotropic if its mean value functional $m(\varphi)$ and covariance functional $B(\varphi_1, \varphi_2)$ are invariant under all transformations in D induced by orthogonal transformations (motions and reflections) in the space R_n. In the case of the n-dimensional random generalized field $\boldsymbol{\xi}(\varphi) = \{\xi_1(\varphi), \ldots, \xi_n(\varphi)\}$ its mean value functional $\mathbf{m}(\varphi) = \{m_1(\varphi), \ldots, m_n(\varphi)\}$ forms a vector in R_n and its covariance functionals $B_{ij}(\varphi_1, \varphi_2)$ form a tensor in R_n. The n-dimensional homogeneous field $\boldsymbol{\xi}(\varphi)$ is called a homogeneous and isotropic random generalized vector field if the vector and the tensor are invariant under all motions and reflections in R_n and the simultaneous transformations in D induced by this motion or reflection. Homogeneous and isotropic random generalized fields and random generalized vector fields are treated in section 4. In this section we obtain the general form of the functionals $m(\varphi)$ (or $\mathbf{m}(\varphi)$)and $B(\varphi_1, \varphi_2)$ (or $B_{ij}(\varphi_1, \varphi_2)$) for these fields.

The locally homogeneous random generalized field $\xi(\varphi)$, $\varphi \in D_1$ is called locally homogeneous and locally isotropic if its mean value functional $m(\varphi)$ and covariance functional $B(\varphi_1, \varphi_2)$ are invariant under all transformations in D_1 induced by orthogonal transformations in R_n; it is also clear how we can define the notion of the locally homogeneous and locally isotropic random generalized vector field $\boldsymbol{\xi}(\varphi)$, $\varphi \in D_1$. Locally homogeneous and locally isotropic random generalized vector fields are treated in section 5. Here we obtain the general form of the mean value functional and of the covariance for these fields; in particular, we obtain the general form of a mean value and of a covariance function of ordinary random fields (scalar and vector) which are locally homogeneous and locally isotropic in the sense of Kolmogorov [17].

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том II И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 3
1957

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ВЕТВЯЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Б. А. СЕВАСТЬЯНОВ

Рассматривается следующая схема размножения частиц. Каждая существующая в данный момент частица независимо от своего происхождения и возраста и независимо от судьбы других частиц с вероятностью $\delta_{k1} + p_k\Delta t + o(\Delta t)$ превращается за промежуток времени $\Delta t \to 0$ в k частиц. Кроме того, независимо от наличия какого-либо числа частиц, с вероятностью $\delta_{k0} + q_k\Delta t + o(\Delta t)$ за промежуток времени $\Delta t \to 0$ возникает k частиц*. Символ δ_{ij} здесь равен 1, если $i = j$ и 0, если $i \neq j$. Очевидно, что p_k и q_k должны удовлетворять равенствам $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} q_k = 0$.

Введем производящие функции

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k,\ g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k,\ F(t;\ x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)\, x^k, \qquad (1)$$

где $P_k(t)$ — вероятность того, что число частиц μ_t в момент времени t равно k, если при $t = 0$ частиц не было.

Обозначим дифференциальные факториальные моменты

$$f'(1) = a_1,\ f''(1) = b_1,\ f'''(1) = c_1,$$

$$g'(1) = a_2,\ g''(1) = b_2.$$

Через эти параметры выражаются первые моменты μ_t. Отметим смысл параметров a_1 и a_2. $a_1\Delta t + o(\Delta t)$ равно математическому ожиданию числа частиц, произведенных одной частицей за промежуток времени $\Delta t \to 0$, $a_2\Delta t + o(\Delta t)$ равно математическому ожиданию числа вновь возникающих частиц за промежуток времени $\Delta t \to 0$. Всегда $a_2 \geqslant 0$. Случай $a_2 = 0$ возможен лишь при $q_k \equiv 0$.

Наша задача состоит в том, чтобы по заданным $f(x)$ и $g(x)$ найти распределение случайной величины μ_t (мы всегда будем предполагать,

* Можно представлять себе, что эти частицы попадают в пространство, где мы изучаем процесс превращения частиц из внешней среды. Эти вновь возникшие частицы в дальнейшем претерпевают превращения по описанной выше схеме ветвящегося процесса.

что при $t = 0$ частиц не было) и определить предельное поведение этого распределения при $t \to \infty$.

Заметим прежде всего, что описанная здесь схема превращения частиц есть частный случай ветвящегося случайного процесса с двумя типами частиц (см. [1], [2]). Для этого кроме изучаемых частиц, которые мы назовем частицами типа T_1, введем еще фиктивную частицу типа T_0. Зададим вероятности превращения частиц за время $\Delta t \to 0$ следующим образом

$$\mathbf{P}\{T_0 \to T_0\} = 1 + g_0 \Delta t + o(\Delta t),$$
$$\mathbf{P}\{T_0 \to T_0 + kT_1\} = q_k \Delta t + o(\Delta t), \quad (k \neq 0)$$
$$\mathbf{P}\{T_1 \to T_1\} = 1 + p_1 \Delta t + o(\Delta t),$$
$$\mathbf{P}\{T_1 \to kT_1\} = p_k \Delta t + o(\Delta t), \quad (k \neq 1).$$

Обозначим, как и в [1], [2], через $E_i^{(\alpha_0, \alpha_1)} + p_i^{(\alpha_0, \alpha_1)} \Delta t + o(\Delta t)$ вероятность превращения за время $\Delta t \to 0$ одной частицы типа T_i в совокупность частиц $\alpha_0 T_0 + \alpha_1 T_1$ (здесь $E_0^{(1,0)} = 1$, $E_1^{(0,1)} = 1$ и $E_i^{(\alpha_0, \alpha_1)} = 0$ в остальных случаях). Введем производящие функции $f_i(x_0, x_1) = \sum_{(\alpha_0, \alpha_1)} p_i^{(\alpha_0, \alpha_1)} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1}$.

В нашем случае

$$p_0^{(1,k)} = q_k, \quad p_1^{(0,k)} = p_k$$

и

$$f_0(x_0, x_1) = x_0 g(x_1), \quad f_1(x_0, x_1) = f(x_1).$$

Пусть $P_i^{(\alpha_0, \alpha_1)}(t)$ — вероятность того, что одна частица типа T_i за время t превращается в совокупность частиц $\alpha_0 T_0 + \alpha_1 T_1$. Производящие функции

$$F_i(t; x_0, x_1) = \sum_{(\alpha_0, \alpha_1)} P_i^{(\alpha_0, \alpha_1)}(t) x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1}$$

удовлетворяют системе функциональных уравнений (см. [1], [2]) при $t > 0$, $s > 0$

$$F_i(s + t; x_0, x_1) = F_i(t; F_0(s; x_0, x_1), F_1(s; x_0, x_1)); \quad i = 0, 1, \tag{2}$$

откуда, используя асимптотическое при $\Delta t \to 0$ соотношение

$$F_i(\Delta t; x_0, x_1) = x_i + f_i(x_0, x_1) \Delta t + o(\Delta t), \tag{3}$$

можно получить систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dF_i}{dt} = f_i(F_0, F_1); \quad i = 0, 1, \tag{4}$$

с начальными условиями

$$F_i(0; x_0, x_1) = x_i, \tag{5}$$

или уравнения в частных производных

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} = f_0(x_0, x_1) \frac{\partial F_i}{\partial x_0} + f_1(x_0, x_1) \frac{\partial F_i}{\partial x_1} \tag{6}$$

с теми же начальными условиями.

В нашем случае система (4) запишется в виде

$$\frac{dF_0}{dt} = F_0 g(F_1),$$

$$\frac{dF_1}{dt} = f(F_1), \qquad (7)$$

а уравнения в частных производных (6) имеют следующий вид:

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} = x_0 g(x_1)\frac{\partial F_i}{\partial x_0} + f(x_1)\frac{\partial F_i}{\partial x_1}. \qquad (8)$$

Производящая функция $F(t; x)$, определенная формулой (1), связана с $F_0(t; x_0, x_1)$, как нетрудно видеть, равенством

$$F_0(t; x_0, x) = x_0 F(t; x). \qquad (9)$$

Из (8) и (9) получаем уравнение для $F(t; x)$

$$\frac{\partial F(t; x)}{\partial t} = g(x) F(t; x) + f(x)\frac{\partial F(t; x)}{\partial x}, \qquad (10)$$

которое нужно решать при начальном условии

$$F(0; x) = 1. \qquad (11)$$

С другой стороны, можно получить удобное выражение для $F(t; x)$ с помощью системы (7). Второе уравнение системы (7) с начальными условиями (5) решается отдельно. Обозначим его решение через $\Phi(t; x)$ (здесь и далее будем писать x вместо x_1). Тогда из первого уравнения системы (7) и из (5) и (9) можно получить

$$F(t; x) = e^{\int_0^t g[\Phi(u; x)]\,du} \qquad (12)$$

Это равенство выражает производящую функцию $F(t; x)$ через производящую функцию $\Phi(t; x)$ ветвящегося процесса, образуемого только одним типом частиц T_1. Из равенства (12) можно получить математическое ожидание и дисперсию μ_t. При $a_1 \neq 0$

$$\mathbf{M}\mu_t = \frac{\partial \ln F(t; x)}{\partial x}\Big|_{x=1} = \frac{a_2}{a_1}(e^{a_1 t} - 1),$$

$$\mathbf{D}\mu_t = \left[\frac{\partial^2 \ln F(t; x)}{\partial x^2} + \frac{\partial \ln F(t; x)}{\partial x}\right]_{x=1} = \frac{b_2 a_1 + a_2 b_1}{2a_1^2}(e^{2a_1 t} - 1) -$$

$$- \frac{a_2}{a_1}\left(\frac{b_1}{a_1} - 1\right)(e^{a_1 t} - 1), \qquad (13)$$

при $a_1 = 0$

$$\mathbf{M}\mu_t = a_2 t, \quad \mathbf{D}\mu_t = (b_2 + a_2)t + \frac{a_2 b_1}{2} t^2. \qquad (14)$$

Из (13) и (14) видно, что при $a_1 < 0$ существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{M}\mu_t = -\frac{a_2}{a_1}$, $\mathbf{M}\mu_t = a_2 t$ растет линейно при $a_1 = 0$, а $\mathbf{M}\mu_t \approx \frac{a_2}{a_1} e^{a_1 t}$ при $a_1 > 0$ растет по показательному закону. Аналогично тому, как это имеет место

в ветвящихся случайных процессах с одним типом частиц, эти три случая соответствуют трем различным предельным теоремам.

Теорема 1. *Если* $a_1 < 0$ *и* $a_2 < \infty$, *то существуют пределы* $\lim\limits_{t\to\infty} P_k(t) = P_k$. *Производящая функция* $F(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k x^k$ *равна*

$$F(x) = e^{\int_x^1 \frac{g(y)}{f(y)}\,dy}. \tag{15}$$

Доказательство. Докажем, что при $a_1 < 0$, $a_2 < \infty$ и $|x| \leqslant 1$ существует предел

$$\lim_{t\to\infty} F(t; x) = \lim_{t\to\infty} e^{\int_0^t g[\Phi(u;x)]\,du} = e^{\int_0^\infty g[\Phi(u;x)]\,du}.$$

Для этого нужно доказать, что при $|x| \leqslant 1$ несобственный интеграл

$$\int_0^\infty g[\Phi(u; x)]\,du \tag{16}$$

сходится. Так как при $|x| \leqslant 1$

$$|g(x)| \leqslant a_2 |x - 1| \text{ и } |\Phi(u; x) - 1| \leqslant e^{a_1 u} |x - 1| \tag{17}$$

$\left(\text{так как } \frac{\partial \Phi(u; 1)}{\partial x} = e^{a_1 u}\right)$, то

$$|g[\Phi(u; x)]| \leqslant 2a_2 e^{a_1 u}$$

и, следовательно, интеграл (16) сходится равномерно по x в круге $|x| \leqslant 1$. Таким образом, существует предельное распределение с производящей функцией

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k x^k = e^{\int_0^\infty g[\Phi(u;x)]\,du}.$$

Покажем, что

$$\int_0^\infty g[\Phi(u, x)]\,du = \int_x^1 \frac{g(y)}{f(y)}\,dy.$$

Для этого продифференцируем несобственный интеграл (16) по параметру x

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty g[\Phi(u; x)]\,du = \int_0^\infty \frac{dg[\Phi(u; x)]}{d\Phi} \cdot \frac{\partial \Phi(u; x)}{\partial x}\,du = \int_0^\infty \frac{dg}{d\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{1}{f(x)}\,du =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\partial g[\Phi(u; x)]}{\partial u}\frac{1}{f(x)}\,du = \frac{g[\Phi(\infty; x)] - g[\Phi(0; x)]}{f(x)} = -\frac{g(x)}{f(x)}.$$

Здесь мы воспользовались равенством $\frac{\partial \Phi(u; x)}{\partial u} = f(x)\frac{\partial \Phi(u; x)}{\partial x}$, которое вытекает из (5) и (6) при $i = 1$, равенством $\Phi(0; x) = x$ и равенством

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t; x) = 1, \tag{18}$$

справедливым при $|x|\leqslant 1$ (см. [2]). Дифференцирование по параметру интеграла (16) законно, так как сходимость в (18) равномерна по x в круге $|x|\leqslant 1$.

Заметим, что предельное в этой теореме распределение вероятностей стационарно, т. е. производящая функция (15) удовлетворяет уравнению (10), если приравнять его левую часть нулю.

Теорема 2. *Если* $a_1=0$, $b_1>0$, c_1, $a_2>0$ *и* b_2 *конечны, то при* $t\to\infty$

$$S_t(y)=\mathbf{P}\left\{\frac{\mu_t}{a_2 t}<y\right\}\to S(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \dfrac{\left(\frac{2a_2}{b_1}\right)^{\frac{2a_2}{b_1}}}{\Gamma\left(\frac{2a_2}{b_1}\right)}\displaystyle\int_0^y y^{\frac{2a_2}{b_1}-1}e^{-\frac{2a_2}{b_1}y}\,dy, & y\geqslant 0\end{cases}\qquad(19)$$

Доказательство. Докажем, что характеристическая функция $F(t;e^{\frac{i\tau}{a_2 t}})$ случайной величины $\mu_t/a_2 t$ при $t\to\infty$ имеет пределом характеристическую функцию распределения $S(y)$, равную $\left(1-\frac{i\tau b_1}{2a_2}\right)^{-\frac{2a_2}{b_1}}$.

В моей статье [2] показано, что при $a_1=0$ и $b_1>0$, c_1 конечных равномерно по x в круге $|x|\leqslant 1$ имеет место асимптотическая формула

$$1-\Phi(t;x)=\frac{1-x}{1+\frac{b_1 t}{2}(1-x)}\,[1+\varepsilon(t;x)],\qquad(20)$$

где $|\varepsilon(t;x)|<C\frac{\ln t}{t}$ при $t\to\infty$.

Покажем, что

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t g\,[\Phi(u,e^{\frac{i\tau}{a_2 t}})]\,du=-\frac{2a_2}{b_1}\ln\left[1-\frac{i\tau b_1}{2a_2}\right].\qquad(21)$$

Для этого разобьем интеграл $\int_0^t g\,[\Phi(u,e^{\frac{i\tau}{a_2 t}})]\,du$ на четыре слагаемых

$$\int_0^t g\,[\Phi(u;e^{\frac{i\tau}{a_2 t}})]\,du=\int_0^T g\,[\Phi(u;e^{\frac{i\tau}{a_2 t}})]\,du-a_2\int_T^t\frac{1-e^{\frac{i\tau}{a_2 t}}}{1+\frac{b_1 u}{2}(1-e^{\frac{i\tau}{a_2 t}})}\,du-$$

$$-a_2\int_T^t\left[1-\Phi(u;e^{\frac{i\tau}{a_2 t}})-\frac{1-e^{\frac{i\tau}{a_2 t}}}{1+\frac{b_1 u}{2}(1-e^{\frac{i\tau}{a_2 t}})}\right]du+\int_T^t[g(\Phi)-a_2(\Phi-1)]\,du=$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4.\qquad(22)$$

При любом конечном $T>0$

$$\lim_{t\to\infty}I_2=\lim_{t\to\infty}\left[-a_2\int_T^t\frac{1-e^{\frac{i\tau}{a_2 t}}}{1+\frac{b_1 u}{2}(1-e^{\frac{i\tau}{a_2 t}})}\,du\right]=-\frac{2a_2}{b_1}\lim_{t\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{b_1 t}{2}(1-e^{\frac{i\tau}{a_2 t}})\right)-\right.$$

$$\left.-\ln\left(1+\frac{b_1 T}{2}(1-e^{\frac{i\tau}{a_2 t}})\right)\right]=-\frac{2a_2}{b_1}\ln\left[1-\frac{i\tau b_1}{2a_2}\right].\qquad(23)$$

Из (17) следует, что при любом конечном T и $t\to\infty$

$$|I_1|=\left|\int_0^T g(\Phi)\,du\right|\leqslant\int_0^T a_2\left|e^{\frac{i\tau}{a_2 t}}-1\right|du\leqslant\frac{|\tau|T}{t}\to 0. \tag{24}$$

Далее,

$$|I_3|=\left|a_2\int_T^t\left[1-\Phi-\frac{1-e^{\frac{i\tau}{a_2 t}}}{1+\frac{b_1 u}{2}\left(1-e^{\frac{i\tau}{a_2 t}}\right)}\right]du\right|\leqslant$$

$$\leqslant a_2\int_T^t\frac{1}{\left|\frac{1}{1-e^{\frac{i\tau}{a_2 t}}}+\frac{b_1 u}{2}\right|}\left|\varepsilon\left(u,e^{\frac{i\tau}{a_2 t}}\right)\right|du\leqslant a_2\int_T^t\frac{2C}{1+b_1 u}\frac{\ln u}{u}\,du\to 0 \tag{25}$$

при $T\to\infty$. Здесь мы воспользовались формулой (20), неравенством $\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{1-x}\right\}\geqslant\frac{1}{2}$, справедливым при $|x|\leqslant 1$ и

$$\frac{1}{\left|\frac{1}{1-x}+\frac{b_1 u}{2}\right|}\leqslant\frac{1}{\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{1-x}+\frac{b_1 u}{2}\right\}}\leqslant\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{b_1 u}{2}}.$$

Наконец, при $|x|\leqslant 1$ из (17) и неравенства

$$|g(x)-a_2(x-1)|\leqslant\frac{b_2}{2}|x-1|^2$$

следует

$$|I_4|=\left|\int_T^t\left(g(\Phi)-a_2(\Phi-1)\,du\right|\leqslant\frac{b_2}{2}\int_T^t|\Phi-1|^2\,du\leqslant\frac{b_2}{2}\int_T^t\left|e^{\frac{i\tau}{a_2 t}}-1\right|^2 du\leqslant$$

$$\leqslant\frac{b_2}{2a_2^2}\frac{\tau^2}{t}. \tag{26}$$

Равенство (21) получается из (22) — (26). Для этого нужно выбрать сначала T так, чтобы $|I_3|$ было мало. Зафиксировав это T и полагая $t\to\infty$, получим, что разность между левой и правой частями (21) может быть сделана сколь угодно малой. Отсюда следует равенство (21) и утверждение теоремы.

В случае $a_1>0$ известно, что в ветвящемся процессе, описываемом производящей функцией $\Phi(t;x)$, выполняется следующая предельная теорема. Если $b_1<\infty$, то характеристическая функция $\frac{\mu_t}{e^{a_1 t}}$ сходится при $t\to\infty$

$$\Phi\left(t;e^{i\tau e^{-a_1 t}}\right)\to u(\tau),$$

где $u(\tau)$ удовлетворяет соотношению (см. [2])

$$(1-u)\,e^{-\int_1^u\frac{f(v)-a(v-1)}{f(v)(v-1)}\,dv}=-i\tau. \tag{27}$$

Теорема 3. *Если* $a_1 > 0$, b_1, a_2, b_2 *конечны, то при* $t \to \infty$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\mu_t}{e^{a_1 t}} < y\right\} = S_t(y) \to S(y).$$

Характеристическая функция $\psi(\tau)$ *предельного распределения* $S(y)$ *равна*

$$\psi(\tau) = e^{\frac{1}{a_1}\int_0^{\tau} \frac{g(u(z))}{z}\, dz}, \tag{28}$$

причем $u(\tau)$ *определяется из уравнения* (27).

Доказательство. Покажем сначала, что при любом $s > 0$ и $t \to \infty$

$$\mathbf{M}\left[\mu_{t+s} e^{-a_1(t+s)} - \mu_t e^{-a_1 t}\right]^2 \to 0 \tag{29}$$

равномерно по s. Так как

$$\mathbf{M}\left[\mu_{t+s} e^{-a_1(t+s)} - \mu_t e^{-a_1 t}\right]^2 = e^{-2a_1(t+s)} \mathbf{D}\mu_{t+s} + e^{-2a_1 t}\mathbf{D}\mu_t -$$

$$- 2e^{-a_1(2t+s)} \mathrm{Cov}(\mu_{t+s}, \mu_t) + \left[\mathbf{M}\mu_{t+s} e^{-a_1(t+s)} - \mathbf{M}\mu_t \cdot e^{-a_1 t}\right]^2,$$

а из (13) следует, что $e^{-2a_1 t} \cdot \mathbf{D}\mu_t \to \frac{b_2 a_1 + a_2 b_1}{2a_1^2}$ при $t \to \infty$ и

$$\mathbf{M}\mu_{t+s} \cdot e^{-a_1(t+s)} - \mathbf{M}\mu_t e^{-a_1 t} = \frac{a_2}{a_1} e^{-a_1 t}\left(1 - e^{-a_1 s}\right) \to 0,$$

то нам достаточно доказать, что

$$e^{-a_1(2t+s)} \mathrm{Cov}(\mu_{t+s}, \mu_t) \to \frac{b_2 a_1 + a_2 b_1}{2a_1^2}. \tag{30}$$

Обозначим через

$$F(t, t+s;\ x_1, x_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\mu_t = k_1,\ \mu_{t+s} = k_2\}\, x_1^{k_1} x_2^{k_2}$$

производящую функцию совместного распределения случайных величин μ_t и μ_{t+s}. С помощью (12) можно получить равенство

$$\ln F(t, t+s;\ x_1, x_2) = \int_0^t g\left[\Phi(u; x_1 \Phi(s; x_2))\right] du + \int_0^s g\left[\Phi(u; x_2)\right] du. \tag{31}$$

Из (31) и

$$\mathrm{Cov}(\mu_{s+t}, \mu_t) = \left.\frac{\partial^2 \ln F(t, t+s; x_1, x_2)}{\partial x_1\, \partial x_2}\right|_{x_1=1,\ x_2=1}$$

получаем

$$\mathrm{Cov}(\mu_{t+s}, \mu_t) = \frac{b_2}{2a_1} e^{a_1 s}\left(e^{2a_1 t} - 1\right) + \frac{b_1 a_2}{2a_1^2} e^{a_1 s}\left(e^{2a_1 t} - 1\right) -$$

$$- \frac{b_1 a_2}{a_1^2}\left(e^{a_1 t} - 1\right) e^{a_1 s} + \frac{a_2}{a_1} e^{a_1 s}\left(e^{a_1 t} - 1\right),$$

откуда следует (30) и (29). Так как пространство случайных величин с $\mathbf{M}\xi^2 < \infty$ полно, то из (29) следует существование такой случайной

величины ξ, что

$$\mathbf{M}\,[\mu_t e^{-a_1 t} - \xi]^2 \to 0. \tag{32}$$

Отсюда следует, что $\mu_t e^{-a_1 t}$ сходится к ξ по вероятности. Поэтому характеристическая функция случайной величины $\mu_t e^{-a_1 t}$ при $t \to \infty$ сходится к предельной характеристической функции

$$\lim_{t\to\infty} F\,(t; e^{i\tau e^{-a_1 t}}) = \exp\,[\lim_{t\to\infty} \int_0^t g\,[\Phi\,(u; e^{i\tau e^{-a_1 t}})]\,du]. \tag{33}$$

Обозначим

$$h\,(\tau) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t g\,[\Phi\,(\rho, e^{i\tau e^{-a_1 t}})]\,d\rho \tag{34}$$

и покажем, что $h\,(\tau) = \dfrac{1}{a_1} \int_0^\tau \dfrac{g\,[u\,(z)]}{z}\,dz$, где $u\,(\tau)$ удовлетворяет уравнению (27).

С помощью неравенства (17) получаем при любом $v > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^v g\,[\Phi\,(\rho, e^{i\tau e^{-a_1 t}})]\,d\rho = 0.$$

Поэтому, если воспользоваться функциональным уравнением $\Phi\,(\rho; x) = \Phi\,(v;\ \Phi\,(\rho - v; x))$, то можно написать

$$h\,(\tau) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t g\,[\Phi\,(\rho; e^{i\tau e^{-a_1 t}})]\,d\rho = \lim_{t\to\infty} \int_v^t g\,[\Phi\,(v; \Phi\,(\rho - v; e^{i\tau e^{-a_1 t}}))]\,d\rho =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_0^{t-v} g\,[\Phi\,(v; \Phi\,(\rho, e^{i\tau e^{-a_1 t}}))]\,d\rho.$$

Пусть v мало. Подинтегральную функцию разложим по степеням v следующим образом

$$g\,[\Phi\,(v, \Phi\,(\rho, e^{i\tau e^{-a_1 t}}))] = g\,[\Phi\,(\rho; e^{i\tau e^{-a_1 t}}) + v f\,(\Phi\,(\rho; e^{i\tau e^{-a_1 t}})) + R_1 v^2] =$$

$$= g\,[\Phi\,(\rho, e^{i\tau e^{-a_1 t}})] + v\,\frac{\partial g\,[\Phi\,(\rho, e^{i\tau e^{-a_1 t}})]}{\partial \Phi} f\,(\Phi\,(\rho; e^{i\tau e^{-a_1 t}})) + R_2 v^2. \tag{35}$$

Дифференцируя равенство $\dfrac{d\Phi}{dv} = f\,(\Phi\,(v; x))$ по v, получим $\dfrac{d^2\Phi}{dv^2} = f'\,(\Phi) \times \dfrac{d\Phi}{dv} = f'\,(\Phi) f\,(\Phi)$. Поэтому при $|x| \leqslant 1$

$$\left|\frac{d^2\Phi}{dv^2}\right| \leqslant (a_1 + 2\,|\,p_1\,|)\,a_1 |\Phi(v; x) - 1| \leqslant (a_1 + 2\,|\,p_1\,|)\,a_1 e^{a_1 v}\,|x - 1|. \tag{36}$$

Разлагая по формуле Тейлора отдельно действительную и мнимую части функции $\Phi\,(v; \Phi\,(\rho; e^{i\tau e^{-a_1 t}}))$ и применяя неравенство (36), получим оценку для R_1

$$|R_1| \leqslant (a_1 + 2\,|\,p_1\,|)\,a_1 e^{a_1 v} e^{a_1 \rho}\,|e^{i\tau e^{-a_1 t}} - 1| \leqslant (a_1 + 2\,|\,p_1\,|)\,a_1 e^{a_1 (\rho + v)}\,|\tau|\,e^{-a_1 t}. \tag{37}$$

Подобными же рассуждениями можно показать, что

$$|R_2| \leqslant 2b_2 \{|f(\Phi(\rho; e^{i\tau e^{-a_1 t}}))|^2 + |R_1|^2 v^2\} + 2a_2 |R_1| \leqslant$$
$$\leqslant 2b_2 \{a_1^2 e^{2a_1\rho} \tau^2 e^{-2a_1 t} + |R_1|^2 v^2\} + 2a_2 |R_1|. \qquad (38)$$

Интегрируя равенство (35) от 0 до $t-v$ и используя оценки (37) и (38), получим

$$\int_0^{t-v} g[\Phi(v; \Phi(\rho - v; e^{i\tau e^{-a_1 t}}))]\, d\rho = \int_0^{t-v} g[\Phi(\rho; e^{i\tau e^{-a_1 t}})]\, d\rho +$$
$$+ v \int_0^{t-v} \frac{dg}{d\Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\, d\rho + O(v^2) = \int_0^{t-v} g[\Phi(\rho; e^{i\tau e^{-a_1 t}})]\, d\rho +$$
$$+ v \{g[\Phi(t-v; e^{i\tau e^{-a_1 t}})] - g[\Phi(0; e^{i\tau e^{-a_1 t}})]\} + O(v^2). \qquad (39)$$

Переходя в обеих частях равенства (39) к пределу при $t \to \infty$, получим

$$h(\tau) = h(\tau e^{-a_1 v}) + v[g(u(\tau e^{-a_1 v})) - g(1)] + O(v^2),$$

откуда при $v \to 0$ следует

$$\tau a_1 h'(\tau) = g[u(\tau)]$$

и

$$h(\tau) = \frac{1}{a_1} \int_0^{\tau} \frac{g[u(z)]}{z}\, dz.$$

Теорема доказана. Заметим, что полученное в теореме 3 предельное распределение абсолютно непрерывно.

Если при $t = 0$ было некоторое начальное распределение вероятностей частиц с производящей функцией $\varphi(x)$, то равенство (12), определяющее $F(t; x)$, перейдет в

$$F(t; x) = \varphi[\Phi(t; x)]\, e^{\int_0^t g[\Phi(u; x)]\, du}$$

При этом предельные теоремы 1 и 2 останутся без изменения, а в теореме 5 характеристическая функция $\psi(\tau)$ предельного распределения будет иметь вид

$$\psi(\tau) = \varphi[u(\tau)]\, e^{\frac{1}{a_1}\int_0^{\tau} \frac{g[u(z)]}{z}\, dz}$$

Поступила в редакцию
25.4.57

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров и Н. А. Дмитриев, Ветвящиеся случайные процессы, ДАН СССР, **56**, № 1 (1947), 7—10.

[2] Б. А. Севастьянов, Теория ветвящихся случайных процессов, Успехи матем. наук, **VI**, вып. 6 (1951), 47—99.

LIMIT THEOREMS FOR BRANCHING STOCHASTIC PROCESSES OF SPECIAL FORM

B. A. SEVASTYANOV (MOSCOW)

(*Summary*)

The following scheme of generating particles is considered. Each particle existing at a given time turns into k particles with the probability $\delta_{k1} + p_k \Delta t + o(\Delta t)$ in time $\Delta t \to 0$ independently of its age and origin and the history of the other particles. Moreover, k particles arise with the probability $\delta_{k0} + q_k \Delta t + o(\Delta t)$ in time $\Delta t \to 0$ no matter how many other particles may be present. Here $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} q_k = 0$, $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ if $i \neq j$. We define the probability-generating functions by $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$, $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k$ and denote factorial moments by $f'(1) = a_1$, $f''(1) = b_1$,

$$f'''(1) = c_1, \quad g'(1) = a_2, \quad g''(1) = b_2.$$

Let μ_t be the number of particles at time t if $\mu_0 = 0$. The following limit theorems are proved.

Theorem 1. *If* $a_1 < 0$, $a_2 < \infty$ *then limits*

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\{\mu_t = k\} = P_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

exist, and probability-generating function

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \text{ is defined by (15).}$$

Theorem 2. *If* $a_1 = 0$ *and* $b_1 > 0$, c_1, $a_2 > 0$, b_2 *are finite, then limit relation* (19) *holds true.*

Theorem 3. *If* $a_1 > 0$, b_1, a_2, b_2 *are finite, then*

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\{\mu_t / e^{a_1 t} < y\} = S(y)$$

exists and distribution function $S(y)$ *has a characteristic function defined by equations* (28) *and* (27).

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том II И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 3*
1957

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ, С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ЗАДАЧАМ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАСЕЧЕК

Ю. В. ЛИННИК

1. Рассмотрим схему уравнивания по элементам в методе наименьших квадратов (см., напр., Арлей и Бух [1]):

$$Y = X^{(0)} + X \cdot A, \tag{1.1}$$

где $A = \left\| \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix} \right\|$ одностолбцовая матрица неизвестных элементов:

$X = X_{Nn} = \| x_{rj} \| (r = 1, 2, \ldots, N;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ и $X^{(0)} = Y^{(0)}_{N1} = \left\| \begin{matrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0N} \end{matrix} \right\|$ — заданные матрицы; $Y = Y_{N1} = \left\| \begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{matrix} \right\|$ неизвестная матрица. Наблюдается матрица: $L = L_{N1} = Y + \Delta$, где $\Delta = \Delta_{N1} = \left\| \begin{matrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_N \end{matrix} \right\|$ обозначает случайный вектор погрешностей. Этот вектор предполагается нормальным, с нулевым вектором средних (несмещенности наблюдений) и независимыми компонентами. Имеем, таким образом:

$$\mathrm{E}\Delta = 0;\ B_\Delta = \mathrm{E}(\Delta\Delta^T) = \sigma^2 \cdot P^{-1}, \tag{1.2}$$

где B_Δ — корреляционная матрица Δ, T — знак транспонирования,

$P = P_{NN} = \left\| \begin{matrix} p_1 0 \ldots 0 \\ 0\, p_2 \ldots 0 \\ \vdots\ \vdots\ \ddots\ \vdots \\ 0\, 0 \ldots p_N \end{matrix} \right\| (p_i > 0;\ i = 1, 2, \ldots, N)$ — матрица известных весов p_i; σ^2 — неизвестный параметр.

Далее предполагается, что $N > n$, и что ранг X равен n. В таком случае можно получить оценки элементов A по методу наименьших квадратов; эти оценки мы обозначим $\widetilde{A}$. Имеем (см. [1]):

$$\widetilde{A} = C^{-1} X^T P (L - X^{(0)}), \tag{1.3}$$

где

$$C = C_{nn} = X^T \cdot P \cdot X \tag{1.4}$$

и C — неособенная симметрическая матрица. Если введем одностолбцовую матрицу «кажущихся поправок»

$$\widetilde{V} = \widetilde{V}_{N1} = X^{(0)} + X\widetilde{A} - L, \tag{1.5}$$

то, как известно, обнаруживается, что $\widetilde{V}$ есть $(N-n)$-мерный нормальный вектор, статистически независимый от n-мерного нормального вектора $\widetilde{A}$. При этом величина

$$\frac{1}{\sigma^2}[\widetilde{pvv}] = \frac{1}{\sigma^2}\widetilde{V}^T \cdot P \cdot \widetilde{V} \tag{1.6}$$

распределена по χ^2_{N-n} и, разумеется, независима от $\widetilde{A}$. Далее, имеем:

$$\mathbf{E}\widetilde{A} = A,\ B_{\widetilde{A}} = \mathbf{E}\left((\widetilde{A}-A)(\widetilde{A}-A)^T\right) = \sigma^2 \cdot C^{-1}, \tag{1.7}$$

т. е. вектор оценок $\widetilde{A}$ не смещен и имеет корреляционную матрицу $\sigma^2 \cdot C^{-1}$.

2. В статье [2] А. Н. Колмогоров приводит построение доверительных интервалов для оценивания $a_1, a_2, \ldots, a_n$ порознь и указывает, что для получения более полной информации целесообразно использовать при конструкции соответствующих статистик все элементы матрицы $\sigma^2 \cdot C^{-1}$, а не только ее диагональные элементы, входящие в конструкцию упомянутых доверительных интервалов. Такие соображения приводят к построению доверительных областей для оценивания всех или некоторых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ или функций от них.

Пусть нам желательно оценить m линейных функций:

$$h_r = g_{r1}a_1 + g_{r2}a_2 + \ldots + g_{rn}a_n,\ r = 1, 2, \ldots, m;\ 1 \leqslant m \leqslant n \tag{2.1}$$

с известными коэффициентами g_{rj}. Вводим матрицу $G = G_{mn} = \|g_{rj}\|$ и переписываем (2.1) в виде:

$$H = H_{m1} = GA. \tag{2.2}$$

Считаем далее, что ранг $(G) = m$, что, очевидно, не нарушает общности постановки. Мы будем строить доверительную область для $H = H_{m1}$.

Теорема*. *Пусть* $\widetilde{H} = G \cdot \widetilde{A}$; $K = K_{mm} = GC^{-1}G^T$ *и* $Z = \left\| \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{matrix} \right\|$ *вектор текущих координат* $z_1, \ldots, z_n$, *тогда матрица* K *неособенная, и доверительный эллипсоид* Θ_{γ_0}:

$$(Z - \widetilde{H})^T \cdot K^{-1} \cdot (Z - \widetilde{H}) = \gamma_0 [\widetilde{pvv}] \tag{2.3}$$

накрывает точку $Z = H$ *с вероятностью* p_0, *причем*

$$F_{m,\,N-n}(\gamma_0) = p_0, \tag{2.4}$$

* В данной формулировке теорема возникла по совету А. Н. Колмогорова при обсуждении ее первоначального варианта на семинаре кафедры теории вероятностей МГУ, 26. 2. 57.

где

$$F_{m,N-n}(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{N-n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\int_0^x\frac{u^{m/2-1}}{(1+u)^{\frac{N-n+m}{2}}}\,du \tag{2.5}$$

— функция распределения Р. Фишера.

3. Перейдем к доказательству теоремы. Из (1.3) находим:

$$\widetilde{A}-A=C^{-1}\cdot X^T\cdot P\cdot\Delta. \tag{3.1}$$

В самом деле, $\widetilde{A}-A=C^{-1}X^TP(Y-X^{(0)}+\Delta)-A=C^{-1}\cdot X^T\cdot P(X^{(0)}+XA-X^{(0)}+\Delta)-A=C^{-1}X^TPXA-A=C^{-1}\cdot X^T\cdot P\cdot\Delta=C^{-1}\cdot X^T\cdot P\Delta$, ибо $C=X^T\cdot P\cdot X$.

Заметим теперь, что K — неособенная матрица, ибо случайный нормальный вектор $\widetilde{H}=G\widetilde{A}$ является m-мерным, так как $\widetilde{A}$ есть n-мерный нормальный вектор, а ранг $(G)=m\leqslant n$. Далее, $\mathbf{E}(\widetilde{H})=G\cdot\mathbf{E}(\widetilde{A})=GA$, а корреляционная матрица $\widetilde{H}$:

$$B_{\widetilde{H}}=\mathbf{E}(G(\widetilde{A}-A)\cdot(G(\widetilde{A}-A))^T)=GB_{\widetilde{A}}G^T=\sigma^2\cdot K \tag{3.2}$$

на основании (1.7). Так как $\widetilde{H}$ есть m-мерный нормальный вектор, и $K=K_{mm}$, то K должна быть неособенной матрицей.

Итак, $\widetilde{H}-H$ нормальный m-мерный вектор с нулевым вектором средних и корреляционной матрицей σ^2K (неособенной). Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 1*. *Квадратичная форма*

$$Q=\frac{1}{\sigma^2}(\widetilde{H}-H)^TK^{-1}(\widetilde{H}-H) \tag{3.3}$$

распределена как χ^2_m.

Пусть $f(x_1,\ \ldots\ ,\ x_m)$ — плотность вероятности для вектора $\widetilde{H}-H$. Как известно: при $X=\left\|\begin{matrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{matrix}\right\|$

$$f(x_1,\ \ldots\ ,\ x_m)=(2\pi)^{-m/2}\sigma^{-m}(\det(K))^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}X^TK^{-1}X\right]. \tag{3.4}$$

Имеем далее: при всяком $x>0$:

$$\mathbf{P}\{Q\leqslant x\}=\int\cdots\int_{\sigma^{-2}X^T\cdot K^{-1}X\leqslant x}f(x_1,x_2,\ \ldots\ ,\ x_m)\,dx_1\ldots dx_m.$$

Пусть $F=F_{mm}$ — ортогональная матрица, приводящая квадратичную форму $\sigma^{-2}X^TK^{-1}X$ к диагональному виду, так что при $X=F\cdot Z$,

$$Q=Z^T\cdot D\cdot Z,\ D=\sigma^{-2}\cdot F^T\cdot K^{-1}\cdot F=\left\|\begin{matrix}d_1\,0\ldots0\\ 0\,d_2\ldots0\\ \vdots\ \ddots\ \vdots\\ 0\ldots d_n\end{matrix}\right\|.$$

* Простое доказательство аналогичной леммы с помощью характеристических функций приведено в работе автора [3].

Тогда $d_i > 0$ и, ввиду того, что $\det(F) = \pm 1$ и соответствующий якобиан равен 1, имеем

$$\mathbf{P}\{Q \leqslant x\} = (2\pi)^{-m/2}(\det(\sigma^2 K))^{-1/2} \int\limits_{Z^T DZ \leqslant x} \cdots \int \exp\Big[-\frac{1}{2} Z^T DZ\Big] dz_1 \ldots dz_m. \quad (3.5)$$

Далее, $\det(D) = d_1 d_2 \ldots d_m = (\det(\sigma^2 K))^{-1}$, так что

$$\mathbf{P}\{Q \leqslant x\} = (2\pi)^{-m/2}(d_1 d_2 \ldots d_m)^{1/2} \times$$

$$\times \int\limits_{d_1 z_1^2 + \cdots + d_m z_m^2 \leqslant x} \cdots \int \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{m} d_j z_j^2\right)\right] dz_1 \ldots, dz_m. \quad (3.6)$$

Полагая $z_j \sqrt{d_j} = w_j\,(j = 1, 2, \ldots, m)$, находим

$$\mathbf{P}\{Q \leqslant x\} = (2\pi)^{-m/2} \times$$

$$\times \int\limits_{w_1^2 + \cdots + w_m^2 \leqslant x} \cdots \int \exp\left[-\frac{1}{2}(w_1^2 + \ldots + w_m^2)\right] dw_1 \ldots dw_m. \quad (3.7)$$

По определению χ_m^2, имеем

$$\mathbf{P}\{Q \leqslant x\} = \mathbf{P}\{\chi_m^2 \leqslant x\},$$

что и требовалось доказать. Поскольку вектор $\widetilde{A}$ статистически не зависит от $[\widetilde{pvv}]$, то это же касается и вектора $\widetilde{H} = G\widetilde{A}$, и квадратичной формы Q. Ввиду этого

$$\frac{Q}{[\widetilde{pvv}]\,\sigma^{-2}} = \frac{(H - \widetilde{H})^T K^{-1}(H - \widetilde{H})}{[\widetilde{pvv}]} = \frac{(\chi_m')^2}{\chi_{N-n}^2}, \quad (3.8)$$

где χ^2-распределения в числителе и знаменателе независимы. Таким образом, при заданном $\gamma_0 > 0$ вероятность события $\mathfrak{A}$:

$$(H - \widetilde{H})^T K^{-1}(H - \widetilde{H}) \leqslant \gamma_0 [\widetilde{pvv}] \quad (3.9)$$

равна

$$\mathbf{P}(\mathfrak{A}) = F_{m,\,N-n}(\gamma_0), \quad (3.10)$$

где $F_{m,\,N-n}(\gamma_0)$ соответствующее распределение Фишера (см., напр., Г. Крамер [4], стр. 267—268).

Накрытие эллипсоидом Θ_{γ_0} (см. (2.3)) точки $Z = H$ совпадает с событием (3.9), и теорема доказана.

4. Рассмотрим некоторые частные случаи. Если $G = E = E_{nn}$, то $H = A$, т. е. мы ищем доверительную область для всех параметров $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. В этом случае $K = C^{-1}$; $K^{-1} = C$, и эллипсоид Θ_{γ_0} имеет вид:

$$(Z - \widetilde{A})^T \cdot C \cdot (Z - \widetilde{A}) = \gamma_0 [\widetilde{pvv}]. \quad (4.1)$$

Другой крайний случай — выделение одного параметра, скажем, a_j. Полагаем: $G = \|0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0\|$ (1 на i-том месте). Тогда

$$K = GC^{-1}G^T = \{C^{-1}\}_{ii}. \quad (4.2)$$

Доверительный эллипсоид $Э_{\gamma_0}$ принимает вид:

$$\frac{(z-\tilde{a}_i)^2}{\{C^{-1}\}_{ii}} = \gamma_0\,[\tilde{p}\tilde{v}\tilde{v}],$$

а накрытие их параметра a_i составляет событие

$$\frac{|a_i-\tilde{a}_i|}{\sqrt{\{C^{-1}\}_{ii}\,[\tilde{p}\tilde{v}\tilde{v}]}} \leqslant \sqrt{\gamma_0}. \tag{4.3}$$

Если составить равносильное событие $\mathfrak{A}$

$$\frac{|a_i-\tilde{a}_i|}{\sqrt{\{C^{-1}\}_{ii}\,\frac{[\tilde{p}\tilde{v}\tilde{v}]}{N-n}}} \leqslant \sqrt{\gamma_0(N-n)}, \tag{4.4}$$

то $\mathbf{P}(\mathfrak{A})$ будет рассчитываться по известному закону Стюдента с $(N-n)$ степенями свободы, и мы получаем хорошо известный случай доверительных интервалов для a_i, связанных с законом Стюдента.

Докажем еще несложную лемму.

Лемма 2. *Распределение Фишера* (2.5) *всегда выражается через элементарные функции.*

Это следует из мемуара П. Л. Чебышева [5] об интегрировании дифференциального бинома $x^{\mu}(a+bx^{\nu})^{\rho}dx$. Для выражения интеграла от такого бинома в элементарных функциях необходимо и достаточно соблюдение хотя бы одного из условий: 1) ρ целое число, 2) $\frac{\mu+1}{\nu}$ целое число, 3) $\frac{\mu+1}{\nu}+\rho$ целое число.

Для распределения Фишера $\nu=1$, $\rho=-\frac{N-n+m}{2}$; $\mu=\frac{m}{2}-1$.

Если $\mu+1$ не целое, то это половина нечетного числа. Если также ρ не целое, то это половина нечетного числа. Но тогда $\mu+1+\rho$ целое число, так что одно из трех условий 1), 2), 3) всегда выполнено и лемма доказана (по существу нам нужна лишь достаточность одного из условий 1), 2), 3), которая доказывается несложно).

Для дальнейшего будут важны случаи $m=n=2$ и $m=n=3$ (обработка результатов засечек на плоскости и в пространстве).

Для случая $m=n=2$ получаем весьма простое выражение из (2.5):

$$F_{2,\,n-2}(\gamma) = N_1\int_0^{\gamma}\frac{du}{(1+u)^{N_1+1}} = 1-(1+\gamma)^{-N_1}, \tag{4.5}$$

где $N_1=\frac{N-2}{2}$.

Решением уравнения (2.4) будет

$$\gamma_0 = \left(\frac{1}{1-p_0}\right)^{\frac{2}{N-2}}-1 \tag{4.6}$$

(в п. 1 предполагалось, что $N>N=2$).

Заметим еще, что при возрастании N и заданной надежности $p_0 < 1$, из (4.6) выводится

$$\gamma_0 = \frac{2}{N-2} \ln \frac{1}{1-p_0} + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \tag{4.7}$$

Случай $m = n = 3$ дает

$$F_{3,\,N-3}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N-3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \int_0^x \frac{u^{1/2}\,du}{(1+u)^{N/2}} =$$

$$= \frac{N-1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N-3}{2}\right)} \int_0^x \frac{u^{1/2}\,du}{(1+u)^{N/2}}. \tag{4.8}$$

Хотя, согласно лемме 2, (4.8) выражается в элементарных функциях, такие выражения получаются громоздкими. Мы ограничимся асимптотическим выражением решений уравнения (2.4) при заданных $m = n$ и $N \to \infty$. Проще всего это сделать исходя из вероятностного смысла распределения Фишера. Уравнение (2.4) запишем в виде

$$F_{n,\,N-n}(\gamma_0) = \mathbf{P}\{(\chi_n')^2 \leqslant \gamma_0 \chi^2_{N-n}\} = p_0, \tag{4.9}$$

где $(\chi_n')^2$ и χ^2_{N-n} независимы: При заданном n и $N - n \to \infty$ можем положить $\chi^2_{N-n} = N - n + \zeta_N$, где $\mathbf{E}\zeta_N = 0$; $\sigma(\zeta_N) = O(\sqrt{N})$. Уравнение (4.9) запишется в виде

$$F_{n,\,N-n}(\gamma_0) = \mathbf{P}\left\{(\chi_n')^2 \leqslant \gamma_0\left(1 + \frac{\zeta_N}{N-n}\right)(N-n)\right\} = p_0. \tag{4.10}$$

Пренебрегая флуктуациями $\frac{\zeta_N}{N-n}$, видим, что

$$\gamma_0 \sim \frac{\xi_0}{N-n}, \tag{4.11}$$

где ξ_0 находится по таблице распределения χ^2_n: если $\mathbf{P}\{\chi^2_n < x\} = K_n(x)$, то

$$K_n(\xi_0) = p_0. \tag{4.12}$$

5. Дадим некоторые применения теоремы 1 к теории прямых и обратных засечек, часто применяющихся в геодезии, артиллерийской инструментальной службе и навигации (в последней, преимущественно, обратные засечки).

Сперва рассмотрим задачу прямой засечки на плоскости*. Пусть из N твердых точек $A_1, A_2, \ldots, A_N$ (точек с известными координатами)

---

* Геометрическая часть задачи о прямой и обратной засечке здесь трактуется по книге А. С. Чеботарева [6].

измерены углы между линиями A_1, A_1', A_2, A_2', ..., $A_N A_N'$ с известными дирекционными углами и направлениями на искомую точку O (см. рис. 1).

В силу случайных погрешностей эти направления не пересекутся в одной точке, и возникает задача статистического оценивания положения точки O. Погрешности считаются случайными, несмещенными и имеющими малую дисперсию. Это позволяет произвести линеаризацию задачи следующим образом: при помощи одного из получившихся $N-1$ треугольников (стараются, чтобы все углы его были не менее 30°) по элементарным формулам тригонометрии находят вспомогательную точку O', в достаточно удобной системе декартовых координат имеющую координаты (x_0', y_0'). Если искомая точка O имеет координаты (x_0, y_0), то поправки $\Delta x_0 = x_0 - x_0'$; $\Delta y_0 = y_0 - y_0'$ считаются малыми сравнительно с выбранной единицей длины, так что квадратами их можно пренебречь. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ — истинные значения дирекционных углов $A_iO (i = 1, 2, \ldots, N)$; $\alpha_1', \ldots, \alpha_N'$ — известные нам дирекционные углы A_iO' $(i = 1, 2, \ldots, N)$; имеем

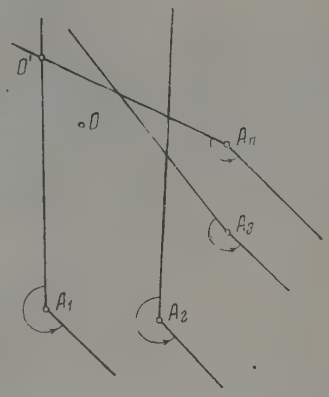

Рис. 1

$$\alpha_i = \alpha_i' + \Delta\alpha_i. \tag{5.1}$$

Далее, $\operatorname{tg}\alpha_i' = \dfrac{y_0' - y_i}{x_0' - x_i}$. Выражая углы в радиальной мере, получим

$$\frac{\Delta\alpha_i}{\cos^2\alpha_i'} \approx \frac{(x_0' - x_i)\,\Delta y_0 - (y_0' - y_i)\,\Delta x_0}{(x_0' - x_i)^2} \tag{5.2}$$

с точностью до величины второго порядка малости. Если

$$d_i' = \overline{A_i O'}, \text{ то } x_0' - x_i = d_i' \cos\alpha_i';\ y_0' - y_i = d_i' \sin\alpha_i',$$

так что (5.2) дает

$$\Delta\alpha_i \approx \frac{\cos\alpha_i'}{d_i'}\Delta y_0 - \frac{\sin\alpha_i'}{d_i'}\Delta x_0. \tag{5.3}$$

Нам известны, однако, не истинные значения поправок $\Delta\alpha_i$, а их измерения l_i с погрешностями Δ_i:

$$l_i = \Delta\alpha_i + \Delta_i. \tag{5.4}$$

Мы предположим Δ_i несмещенными, нормальными и независимыми с известными весами p_i:

$$\mathbf{E}\,\Delta_i = 0;\ \mathbf{D}(\Delta_i) = \frac{\sigma^2}{p_i}\ (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{5.5}$$

где σ неизвестно. Далее, полагаем

$$-\frac{\sin\alpha_i'}{d_i'} = a_i;\quad \frac{\cos\alpha_i'}{d_i'} = b_i\ (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{5.6}$$

и приходим к системе уравнений типа (1.1), с точностью до величин

второго порядка малости:

$$l_i - \Delta_i = a_i \Delta x_0 + b_i \Delta y_0 \ (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{5.7}$$

Заметим, что такая постановка дает нам достаточно общий случай прямой засечки; например, случай повторных наблюдений с каких-либо твердых точек можно трактовать и путем введения весов, и путем отождествления твердых точек (это приводит к одному и тому же).

Имеем $n = 2$. Согласно теореме п. 2 будем строить доверительный эллипс $Э_{\gamma_0}$ для истинных поправок $(\Delta x_0, \Delta y_0)$. Берем $m = n = 2$. Основная матрица X будет иметь вид:

$$X = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_N & b_N \end{matrix} \right\|. \tag{5.8}$$

Покажем, что ранг $(X) = n = 2$. В самом деле, скажем:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{d'_1 d'_2} \begin{vmatrix} -\sin \alpha'_1 & \cos \alpha'_1 \\ -\sin \alpha'_2 & \cos \alpha'_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{d'_1 d'_2} \sin (\alpha'_2 - \alpha'_1) \neq 0,$$

если точки A_1 и A_2 не совпадают.

Матрица нормальных уравнений здесь будет:

$$C = X^T P X = \left\| \begin{matrix} [paa] & [pab] \\ [pab] & [pbb] \end{matrix} \right\|. \tag{5.9}$$

Из системы нормальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} [paa]\,\widetilde{\Delta x} + [pab]\,\widetilde{\Delta y} &= [pal] \\ [pab]\,\widetilde{\Delta x} + [pbb]\,\widetilde{\Delta y} &= [pbl] \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

находим оценки $(\widetilde{\Delta x}, \widetilde{\Delta y})$ истинных поправок $(\Delta x, \Delta y)$ по наименьшим квадратам. Далее, полезна известная формула

$$[p\tilde{v}\tilde{v}] = [pll] - [pal]\,\widetilde{\Delta x} - [pbl]\,\widetilde{\Delta y}. \tag{5.11}$$

Для составления доверительного эллипса $Э_{\gamma_0}$ образуем

$$Q(\xi, \eta) = [paa]\,\xi^2 + 2\,[pab]\,\xi\eta + [pbb]\,\eta^2. \tag{5.12}$$

Тогда доверительный эллипс $Э_{\gamma_0}$ примет вид:

$$Q(\Delta x - \widetilde{\Delta x}, \ \Delta y - \widetilde{\Delta y}) = \gamma_0\,[p\tilde{v}\tilde{v}] \tag{5.13}$$

или, согласно (5.11),

$$Q(\Delta x - \widetilde{\Delta x}, \ \Delta y - \widetilde{\Delta y}) = \gamma_0\,([pll] - [pal]\,\widetilde{\Delta x} - [pbl]\,\widetilde{\Delta y}). \tag{5.14}$$

Эллипс $Э_\gamma$ будет накрывать точку $\Delta x = \Delta x_0$; $\Delta y = \Delta y_0$ с вероятностью p_0, причем по заданной p_0 соответствующее γ_0 находится по формуле (4.6):

$$\gamma_0 = \left(\frac{1}{1 - p_0}\right)^{\frac{2}{N-2}} - 1.$$

При больших значениях N, согласно (4.7),

$$\gamma_0 = \frac{2}{N-2} \ln \frac{1}{1-p_0} + O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Остановимся вкратце на случае прямой засечки с двух твердых пунктов A_1 и A_2 при повторных наблюдениях. Для простоты, пусть эти наблюдения равноточны и с обоих пунктов производится по $\frac{N}{2}$ (N четно) наблюдений. Тогда имеем, отождествляя по $\frac{N}{2}$ точек A_i:

$$[paa] = \frac{N(a_1^2 + a_2^2)}{2}; \quad [pbb] = \frac{N(b_1^2 + b_2^2)}{2}; \quad [pab] = \frac{N(a_1 b_1 + a_2 b_2)}{2}. \quad (5.15)$$

Полагая

$$Q(\xi, \eta) = (a_1^2 + a_2^2)\xi^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2)\xi\eta + (b_1^2 + b_2^2)\eta^2, \quad (5.16)$$

получим доверительный эллипс $Э_{\gamma_0}$ в виде:

$$Q(\Delta x - \widetilde{\Delta x}, \ \Delta y - \widetilde{\Delta y}) = 2\gamma_0 \frac{[\widetilde{pv}\,\widetilde{v}]}{N}. \quad (5.17)$$

В расчет $[\widetilde{pv}\,\widetilde{v}]$, например, по формуле (5.11), можно внести очевидные упрощения.

При $N \to \infty$, из формулы (4.7) для γ_0 и известных свойств $[\widetilde{pv}\,\widetilde{v}]$, всилу которых $\frac{[\widetilde{pv}\,\widetilde{v}]}{N}$ должно стремиться к σ^2 по вероятности, видим, что $Э_{\gamma_0}$ будет с вероятностью 1 относительно мало отличаться от детерминированного эллипса с полуосями порядка $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

6. Перейдем к задаче об определении места на плоскости по обратной засечке на $N \geqslant 3$ твердых пунктов. Сюда относится, в частности, известная задача Л. Потенота, об определении места по обратной засечке с трех твердых пунктов.

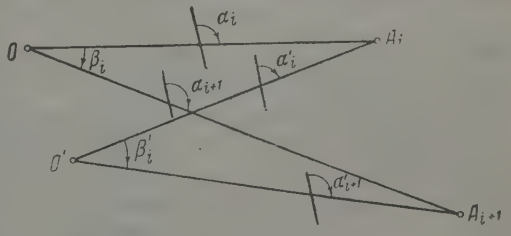

Рис. 2

Пусть из искомой точки O измеряются углы между направлениями на твердые точки $A_1, A_2, \ldots, A_N$, причем имеются случайные погрешности с небольшой дисперсией. Выбираем три подходящие точки среди A_1 A_2, A_3 и решаем задачу Потенота для нахождения приближения O' к искомой точке O. Схема решения задачи Потенота имеется почти во всех учебниках геодезии (см., напр., Ф. Н. Красовский [7], стр. 188—190).

Как и в п. 5, считаем разности координат O и O' такими, квадратами которых можно пренебречь сравнительно со взятой единицей длины.

Введем обозначения углов соответственно рис. 2 (α_i — дирекционные углы).

Найдем

$$\beta_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i; \ \beta'_i = \alpha'_{i+1} - \alpha'_i.$$

Положим

$$\Delta\alpha_{i+1} = \alpha_{i+1} - \alpha'_{i+1};\ \Delta\alpha_i = \alpha_i - \alpha'_i.$$

Отсюда

$$\Delta\beta_i = \beta_i - \beta'_i = \Delta\alpha_{i+1} - \Delta\alpha_i.$$

Далее, если введем известные нам расстояния: $d'_i = \overline{O'A_i}$, то, как в п. 5, получим:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\alpha_i &\cong -\frac{\cos\alpha'_i}{d'_i}\Delta y + \frac{\sin\alpha'_i}{d'_i}\Delta x_0, \\ \Delta\alpha_{i+1} &\cong \frac{\cos\alpha'_{i+1}}{d'_{i+1}}\Delta y_0 + \frac{\sin\alpha'_{i+1}}{d'_{i+1}}\Delta x_0, \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

где $\Delta x_0 = x_0 - x'_0$; $\Delta y = y_0 - y'_0$ — разности координат точек $O(x_0, y_0)$ и $O'(x'_0, y'_0)$. Углы берутся в радиальной мере; ввиду того что двигается вершина угла, получаются знаки, обратные знакам в (5.3). Полагаем далее:

$$a_i = \frac{\sin\alpha'_{i+1}}{d'_{i+1}} - \frac{\sin\alpha'_i}{d'_i};\quad b_i = -\frac{\cos\alpha'_{i+1}}{d'_{i+1}} + \frac{\cos\alpha'_i}{d'_i} \tag{6.2}$$

и, вычитая первое из уравнений (6.1) из второго, найдем:

$$\Delta\beta_i \cong a_i\Delta x_0 + b_i\Delta y_0 \quad (i = 1,\ 2, \ldots, N-1). \tag{6.3}$$

Нам известны, однако, не истинные поправки $\Delta\beta_i$, а наблюдения $l_i = \Delta\beta_i + \Delta_i\,(i = 1, 2, \ldots, N-1)$, где $\Delta_i\,(i = 1, 2, \ldots, N-1)$ — случайные погрешности, про которые мы предполагаем то же, что и в п. 5. Получаем фундаментальные уравнения

$$l_i - \Delta_i = a_i\Delta x_0 + b_i\Delta y_0 \quad (i = 1, 2, \ldots, N-1). \tag{6.4}$$

Все выводы п. 5 здесь сохраняются; доверительный эллипс $Э_{\gamma_0}$ имеет вид (5.13); p_0 и γ_0 связаны формулой (4.7) с заменой N на $N-1$. Числа a_i, b_i, разумеется, имеют иной смысл; они выражаются формулами (6.2).

Рассмотрим еще частный случай — решение задачи Потенота при многократных засечках на 3 твердые пункта. Для простоты будем считать наблюдения равноточными и будем полагать, что каждый из двух углов измерен $\frac{N}{2}$ раз (N четно). Тогда мы придем к доверительному эллипсу $Э_{\gamma_0}$, имеющему вид (5.17), причем a_i и b_i в формуле (5.16) надо подставить из формулы (6.2).

Для прямых засечек в трехмерном пространстве с двух или более твердых пунктов можно вывести аналогичные формулы; надежность здесь будет связана с γ_0 с помощью формулы (4.8).

Поступила в редакцию
12. 3. 57

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Арлей, К. Бух, Введение в теорию вероятностей и математическую статистику, ИИЛ. М., 1951.

[2] А. Н. Колмогоров, К обоснованию метода наименьших квадратов, Успехи мат. наук, **1**, вып. 1 (11) (1946), 57—70.

[3] Ю. В. Линник, Об одном вопросе статистики зависимых наблюдений, Изв. АН СССР, сер. матем., **14** (1950), 501—522.
[4] Г. Крамер, Математические методы статистики, ИИЛ, М., 1948.
[5] П. Л. Чебышев, Sur l'integration des différentielles irrationnelles, Journ. de math. sér. 1, t. 18 (1853), 87—111.
[6] А. С. Чеботарев, Геодезия, ч. II, Геодезиздат, М., 1949.
[7] Ф. Н. Красовский, Курс геодезии, ч. II, ГИЗ, 1930.

SOME REMARKS ON LEAST SQUARES IN CONNECTION WITH DIRECT AND INVERSE LOCATION PROBLEMS

Yu. V. LINNIK (LENINGRAD)

(Summary)

We consider the problem of a least square estimation of the matrix of "elements" $A = \left\| \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix} \right\|$ by means of the equations;

$$Y = X^{(0)} + XA,$$

where $X^{(0)} = X^{(0)}_{N1} = \left\| \begin{matrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0N} \end{matrix} \right\|$; $X = X_{Nn} = \| x_{rj} \|$ are known matrices; $Y = \left\| \begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{matrix} \right\|$ is an unknown matrix; $L = L_{N1} = Y + \Delta$ the matrix of observations, $\Delta = \Delta_{N1} = \left\| \begin{matrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_N \end{matrix} \right\|$ the error matrix, which is a normal unbiased vector with the correlation matrix $B_\Delta = \sigma^2 P^{-1}$. $P = \left\| \begin{matrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & p_N \end{matrix} \right\|$; $p_i > 0$ is the known weight matrix, σ^2 an unknown parameter. The following theorem on confidence domains is proved:

Theorem. *Let* $G = G_{mn}$ *be a known* $m \times n$ *matrix with range* m; $H = \left\| \begin{matrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{matrix} \right\| = GA$; $Z = \left\| \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{matrix} \right\|$ *the general coordinate vector*; $C = X^T PX$; $K = GC^{-1} G^T$; $\widetilde{A} = \left\| \begin{matrix} \widetilde{a}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{a}_n \end{matrix} \right\|$ *the matrix of least square estimates of* A;

$$\widetilde{V} = X^{(0)} - X\widetilde{A} - L; \quad \widetilde{H} - G\widetilde{A}$$

Then K *is non-singular, and the confidence ellipsoid* $\Im_{\gamma_0}$:

$$(Z - \widetilde{H})^T \cdot K^{-1} \cdot (Z - \widetilde{H}) = \gamma_0 [p \widetilde{v} \widetilde{v}]$$

covers the point $Z = H$ *with the probability* p_0, *where* $F_{m, N-n}(\gamma_0) = p_0$, $F_{m, N-n}(x)$ *being Fisher's distribution with* m *and* $N - n$ *degrees of freedom.*

The extreme cases are: $G = E$; $H = A$; $K = C^{-1}$; $K = C$ and: $G = \| 00, \dots, 1, 0, \dots 0 \|$ (1 on i-th place); $K = GC^{-1} G^T = \{C^{-1}\}_{ii}$, $\Im_{\gamma_0}$ of the type $\dfrac{(z - \widetilde{a}_i)^2}{\{C^{-1}\}_{ii}} = \gamma_0 [p \widetilde{v} \widetilde{v}]$ which is tantamount to the construction of the well known separate confidence intervals for a_i's involving Student's distribution.

An application to geodetic location problems on a plane is given. In this case $n = 2$, and the equation $F_{2, N-2}(\gamma_0) = p_0$ is solvable in elementary functions.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том II И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 3
1957

ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕТВЯЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В. П. ЧИСТЯКОВ

Введение

Последовательное изложение теории ветвящихся случайных процессов можно найти в работе Б. А. Севастьянова [1]. Приведем основные положения этой теории.

Пусть одна частица за промежуток времени t превращается в k частиц того же типа с вероятностью $P_k(t)$. Случайный процесс из такого рода превращений называется ветвящимся, если вероятности $P_k(t)$ не зависимы от:

1) способа и времени возникновения исходной частицы, про которую предполагается лишь, что она существует в начальный момент времени;

2) судьбы других частиц, могущих входить в рассмотрение, отличных от данной в начальный момент времени, и частиц, возникающих из нее за время $t>0$. Введем производящую функцию $F(t, x)=\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)\,x^k$. Можно доказать, что при $|x|\leqslant 1$ функция $F(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$F(t+s, x)=F[t, F(s, x)] \tag{1}$$

и граничному условию $F(0, x)=x$. Это основное уравнение теории ветвящихся случайных процессов.

Уравнение (1) справедливо для процессов с непрерывным временем и для процессов с дискретным временем. Во всех следующих параграфах, кроме последнего, будем считать, что время непрерывно.

Пусть вероятности $P_k(t)$ удовлетворяют условиям

$$P_k(t+\Delta t)=\delta_{1k}+p_k\,\Delta t+\eta_k(\Delta t)\,\Delta t, \tag{2}$$

где $\eta_k(\Delta t)\to 0$ при $\Delta t\to 0$, а $\delta_{1k}=\begin{cases}1 & k=1,\\ 0 & k\neq 1.\end{cases}$

Если вероятности $P_k(t)$ удовлетворяют (2), то при $|x|\leqslant 1$ справедливо утверждение

$$F(t, x)=x+f(x)\,\Delta t+o(\Delta t), \quad \Delta t\to 0, \tag{3}$$

где $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k\,x^k$ и p_k — постоянные, определяемые равенством (2). Будем всегда требовать выполнения условия $\sum_{k=0}^{\infty} p_k=0$.

Обозначим через h наибольший общий делитель попарных разностей индексов n, для которых $p_n\neq 0$.

Величины

$a=f'(1)$, $b=f''(1)$, $c=f'''(1)$, $d=f^{\mathrm{IV}}(1)$ и т. д. будем называть *факториальными моментами*.

Используя (1) и (3), можно получить теорему: *при* $|x|\leqslant 1$ *производящая функция* $F(t, x)$ *ветвящегося случайного процесса с непрерывным временем удовлетворяет диф-*

ференциальному уравнению

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = f[F(t, x)] \tag{4}$$

и граничному условию $F(0, x) = x$.

Введем обозначения для величин, характеризующих ветвящийся процесс. Обозначим через μ_t число частиц в момент времени t. Величина $P_0(t)$ есть вероятность вырождения процесса, начавшегося с одной частицы, к моменту t (процесс выродился, если не осталось ни одной частицы), $Q(t) = 1 - P_0(t)$ — вероятность продолжения процесса $P_k^*(t) = \dfrac{P_k(t)}{Q(t)}$ — условная вероятность того, что к моменту t потомство одной частицы будет состоять из k частиц при условии $\mu_t > 0$.

Рассмотрим еще условный закон распределения

$$S_t(y) = \mathbf{P}\left\{\frac{\mu_t}{M^*(t)} < y \,\middle|\, \mu_t > 0\right\}, \text{ где } M^*(t) = \frac{e^{at}}{Q(t)}.$$

Пусть

$$S_1(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leqslant 0, \\ 1 - e^{-y} & \text{при } y > 0. \end{cases}$$

Обозначим через $S_2(y)$ закон распределения, характеристическая функция которого имеет вид

$$\psi(\tau) = \frac{u[(1-\lambda)\tau] - \lambda}{1 - \lambda},$$

где λ наименьший неотрицательный корень уравнения $f(x) = 0$, а $u(\tau)$ удовлетворяет соотношению

$$(1-u)\exp\left[-\int_1^u \frac{f(v) - a(v-1)}{f(v)(v-1)}\,dv\right] = -i\tau.$$

Приведенные выше обозначения будут сохраняться на протяжении всей работы.

Основные предельные теоремы, относящиеся к рассматриваемому типу ветвящихся процессов, приведем в следующей таблице:

a	$Q(t)$	Интегральная теорема	Локальная теорема
$a < 0$	$\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{Q(t)}{Ke^{at}} = 1$, K — некоторая постоянная, зависящая от вида $f(x)$		Если $b < \infty$, то при $t \to \infty$ $\{P_m^*(t)\} \to \{P_m^*\}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P_k^* x^k = 1 - \exp\left[a\int\limits_a^x \dfrac{du}{f(u)}\right]$
$a = 0$	$\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{btQ(t)}{2} = 1$	Если $b < \infty$, $c < \infty$, то $\lim\limits_{t\to\infty} S_t(y) = S_1(y)$	Если b, c, d конечны, то при $t \to \infty$ и $0 < c_1 < z_{n,t} < c_2$ $\dfrac{bt}{2} P_n^*(t) = e^{-z_{n,t}} + 0\left(t^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\ln t}\right)$, где $z_{n,t} = \dfrac{2n}{bt}$
$a > 0$	$\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{Q(t)}{1-\lambda} = 1$	Если $b < \infty$, то $\lim\limits_{t\to\infty} S_t(y) = S_2(y)$, $S_2(y)$ — непрерывное распределение	Если $b < \infty$ и $0 < c_1 \leqslant z_{n,t} \leqslant c_2$, то при $t \to \infty$ $\dfrac{e^{at}}{1-\lambda} P_n^*(t) =$ $= \begin{cases} hs(z_{nt}) + o(1) & \text{при } n \equiv 1 \pmod h \\ 0 & \text{при } n \not\equiv 1 \pmod h, \end{cases}$ где $z_{n,t} = (1-\lambda)ne^{-at}$, а $s(y)$ — плотность распределения $S_2(y)$

Локальная теорема в случае $a<0$ и интегральные теоремы в случаях $a=0$ и $a>0$ были получены для процессов с дискретным временем А. М. Ягломом (см. [3]), а в предположении непрерывного времени Б. А. Севастьяновым (см. [1]).

В настоящей заметке будут получены приведенные в таблице локальные теоремы для случаев $a=0$ и $a>0$. Предварительно потребуется уточнить асимптотические формулы для $Q(t)$ и $R(t, x)=1-F(t, x)$, полученные Б. А. Севастьяновым в работе [1], а также установить существование плотности распределения $S_2(y)$. В § 5 некоторые результаты будут перенесены на ветвящиеся процессы с дискретным временем.

§ 1. Асимптотические формулы для $R(t, x)=1-F(t, x)$ при $a=0$

В работе Б. А. Севастьянова ([1], стр. 72) в связи с доказательством интегральной предельной теоремы для случая $a=0$, $b>0$, $c<\infty$ было получено соотношение при $t\to\infty$

$$\frac{1}{R(t, x)}-\frac{1}{1-x}=\frac{bt}{2}+O(\ln t), \tag{5}$$

где x — любое комплексное число, удовлетворяющее условию $|x|\leqslant 1$.

Если $x\in\{x: |x|\leqslant 1,\ |x-1|\geqslant r>0\}$, то из (5) следует при $t\to\infty$

$$R(t, x)=\frac{2}{bt}+O\left(\frac{\ln t}{t^2}\right). \tag{6}$$

В дальнейшем для $R(t, x)$ нам потребуется более точная формула.

Лемма 1. *Если $a=0$, факториальные моменты b, c, d существуют и $x\in\{x: |x|\leqslant 1,\ |x-1|\geqslant r>0\}$, то при $t\to\infty$*

$$R(t, x)=\frac{2}{bt}+\frac{4c}{3b^2}\frac{\ln t}{t^2}+\frac{4K(x)}{b^2t^2}+O\left(\frac{\ln^2 t}{t^3}\right),$$

где $K(x)$ — некоторая функция от x, зависящая от вида $f_k(x)$.

Доказательство. Полагая в (4)

$$F(t, x)=1-R(t, x)$$

и преобразуя правую часть по формуле Тейлора, получим

$$-\frac{dR}{dt}=f(1-R)=\frac{b}{2}R^2-\frac{c}{6}R^3+\frac{\overline{d}}{24}R^4, \tag{7}$$

где $\overline{d}$ — некоторое комплексное число. Можно показать, что $|\overline{d}|\leqslant d$. Из соотношения (7) следует

$$\frac{d\left[\frac{1}{R(t, x)}-\frac{bt}{2}\right]}{dt}=-\frac{c}{6}R(t, x)+\frac{\overline{d}}{24}R^2(t, x). \tag{8}$$

Проинтегрируем (8) в пределах от 0 до t

$$\frac{1}{R(t, x)}-\frac{1}{1-x}-\frac{bt}{2}=\int_0^t\left[-\frac{c}{6}R(\tau, x)+\frac{\overline{d}}{24}R^2(\tau, x)\right]d\tau. \tag{9}$$

Выберем t_0 так, чтобы одновременно выполнялись неравенства

$$|R(t, x)|<\frac{c_1}{t} \quad \text{и} \quad \left|R(t, x)-\frac{2}{bt}\right|<c_2\frac{\ln t}{t}$$

для всех $t>t_0$, c_1 и c_2 — некоторые постоянные. На основании (6) такое t_0 найдется. Разобьем промежуток интегрирования в правой части (9) на две части; одна часть от 0

до t_0, другая — от t_0 до t. Используя соотношение (6), можно получить

$$\frac{1}{R(t,x)} - \frac{bt}{2} + K(\dot{x}) = -\frac{c}{3b}\ln t + O\left(\frac{\ln t}{t}\right), \tag{10}$$

где $K(x)$ — некоторая функция. Из условия $x \in \{x : |x| \leqslant 1, |x-1| \geqslant r > 0\}$ следует, что $K(x)$ ограничена. Учитывая ограниченность $K(x)$ из равенства (10), получим утверждение леммы 1.

Если в лемме 1 положить $x = 0$, то получим:

Следствие. *В предположениях леммы 1 при* $t \to \infty$

$$Q(t) = \frac{2}{bt} + \frac{4c}{3b^2}\frac{\ln t}{t^2} + \frac{4K(0)}{b^2 t^2} + O\left(\frac{\ln^2 t}{t^3}\right).$$

Используя полученные результаты, выделим главную часть функции $F^*(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k^*(t) x^k$ при $t \to \infty$

Лемма 2. *В предположениях леммы 1 при* $t \to \infty$ *справедливо равенство*

$$F^*(t,x) = \frac{1}{t}\int_0^x \frac{d\tau}{f(\tau)} + O\left(\frac{\ln^2 t}{t^2}\right).$$

Доказательство. Функция $F^*(t, x)$ равна

$$F^*(t,x) = \frac{F(t,x) - F(t,0)}{1 - F(t,0)} = 1 - \frac{1 - F(t,x)}{1 - F(t,0)} = \frac{Q(t) - R(t,x)}{Q(t)}. \tag{11}$$

Заменим в (11) $Q(t)$ и $R(t, x)$ их выражениями, полученными в лемме 1. Преобразуя полученные выражения, найдем

$$F^*(t,x) = \frac{2}{bt}[K(0) - K(x)] + O\left(\frac{\ln^2 t}{t^2}\right). \tag{12}$$

Для вычисления разности $K(0) - K(x)$ составим вначале для $K(x)$ дифференциальное уравнение. Из равенства (10)

$$-K(x) = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{R(t,x)} - \frac{bt}{2} + \frac{c}{3b}\ln t\right]. \tag{13}$$

На основании соотношения (13), а также уравнения $R[t+s, x] = R[t, F(s, x)]$, которое является следствием (1), можно написать следующую цепочку равенств:

$$-K(x) = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{R(t+s,x)} - \frac{b(t+s)}{2} + \frac{c}{3b}\ln(t+s)\right] =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{R[t,F(s,x)]} - \frac{bt}{2} + \frac{c}{3b}\ln t - \frac{c}{3b}\ln t - \frac{bs}{2} + \frac{c}{3b}\ln(t+s)\right] =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{R[t,F(s,x)]} - \frac{bt}{2} + \frac{c}{3b}\ln t\right] + \lim_{t\to\infty}\frac{c}{3b}\ln\left(1+\frac{s}{t}\right) - \frac{bs}{2}.$$

Отсюда получим:

$$K(x) = K[F(s,x)] + \frac{bs}{2}. \tag{14}$$

Преобразуя $K[F(s, x)]$ по формуле Тейлора как функцию от s в окрестности точки $s = 0$, получим

$$K(x) = K(x) + sf(x)\frac{dK(x)}{dx} + \frac{bs}{2} + o(s). \tag{15}$$

Отсюда следует

$$f(x)\frac{dK}{dx} = -\frac{b}{2}.$$

Разделим это последнее равенство на $f(x)$ и проинтегрируем в пределах от 0 до x

$$K(0) - K(x) = \frac{b}{2}\int_0^x \frac{d\tau}{f(\tau)}. \tag{16}$$

Из (12) и (16) следует утверждение леммы.

Замечание. Отметим, что переход от (14) к (15) законен, если существует производная функции $K(x)$ по x. Функция $K(x)$ — аналитическая в области $|x|<1$, так как из соотношения (10) следует, что $K(x)$ является пределом равномерно сходящейся последовательности аналитических функций. Таким образом, формула (16) верна для $|x|<1$. Ниже нам потребуется эта формула для $x = e^{iu}$, $\varepsilon \leqslant |u| \leqslant \pi$. Покажем, что $K(\rho e^{iu})$ непрерывна слева в точке $\rho = 1$, если $\varepsilon \leqslant |u| \leqslant \pi$, ρ — действительная переменная, u — фиксировано. Оценим разность

$$|F(t, e^{iu}) - F(t, \rho e^{iu})| \leqslant \int_\rho^1 \left|\frac{\partial F(t, re^{iu})}{\partial r}\right| dr \leqslant (1-\rho).$$

Используя равенство (10), получим

$$\left|\frac{1}{R(t, \rho e^{iu})} - \frac{1}{R(t, e^{iu})} + K(\rho e^{iu}) - K(e^{iu})\right| < c\,\frac{\ln t}{t}.$$

Отсюда следует, что

$$|K(e^{iu}) - K(\rho e^{iu})| \leqslant c\,\frac{\ln t}{t} + \left|\frac{1}{R(t, \rho e^{iu})} - \frac{1}{R(te^{iu})}\right|.$$

Непрерывность $K(\rho e^{iu})$ в точке $\rho = 1$ следует из последнего неравенства, так как

$$\left|\frac{1}{R(t, \rho e^{iu})} - \frac{1}{R(t, e^{iu})}\right| \leqslant c_1 |F(t, e^{iu}) - F(t, \rho e^{iu})| \leqslant c_1(1-\rho).$$

Положим в (16) $x = \rho e^{iu}$, где $\rho < 1$. Пусть теперь $\rho \to 1-0$. В силу непрерывности левой и правой части (16) в точке $\rho = 1$ получим, что формула верна для

$$x \in \{x : |x| \leqslant 1,\ |x-1| \geqslant r > 0\}.$$

§ 2. Локальная предельная теорема в случае $a = 0$

Теорема 1. *Пусть $a = 0$, b, c, d конечны. Обозначим $\frac{2n}{bt} = z_{n,t}$. Тогда при $t \to \infty$ имеем*

$$\frac{bt}{2} P_n^*(t) = e^{-z_{n,t}} + O(t^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\ln t}),$$

если $0 < c_1 \leqslant z_{n,t} \leqslant c_2 < \infty$, где c_1 и c_2 — некоторые постоянные.

При доказательстве теоремы 1 нам потребуется оценка при $t \to \infty$ разности

$$\psi_t\left(\frac{2u}{bt}\right) - \frac{1}{1-iu},$$

где

$$\psi_t(u) = F^*(t, e^{iu}) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k^*(t)\, e^{iku}$$

Пусть функция $\eta(t)$ удовлетворяет условиям

1. $\eta(t) \to \infty$ при $t \to \infty$,
2. $\frac{\eta(t)}{t} \to 0$ при $t \to \infty$.

Лемма 3. *Пусть $a = 0$, b, c существуют. Тогда при $t \to \infty$* $\psi_t\left(\frac{2u}{bt}\right) - \frac{1}{1 - iu} = O\left(\frac{\ln t}{t}\right)$, если $|u| \leqslant \eta(t)$.

Доказательство. Полагая в (5) $x = e^{i\frac{2u}{bt}}$, найдем при $t \to \infty$

$$R\left(t, e^{i\frac{2u}{bt}}\right) = \frac{1}{\frac{bt}{2} + \frac{1}{1 - e^{i\frac{2u}{bt}}}}\left[1 + O\left(\frac{\ln t}{t}\right)\right]. \tag{17}$$

Для $x = 0$ из равенства (5) следует при $t \to \infty$

$$Q(t) = \frac{2}{bt}\left[1 + O\left(\frac{\ln t}{t}\right)\right]. \tag{18}$$

Используя (17) и (18), получим

$$\psi_t\left(\frac{2u}{bt}\right) = 1 - \frac{R\left(t, e^{i\frac{2u}{bt}}\right)}{Q(t)} = 1 + \frac{iu}{1 - iu + O\left(\frac{u}{t}\right)} + O\left(\frac{\ln t}{t}\right).$$

Из этого последнего равенства легко следует утверждение леммы 3.

Доказательство теоремы 1. Пусть

$$\psi_t(u) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^*(t)\, e^{inu}.$$

Отсюда по формуле для коэффициентов Фурье имеем

$$2\pi \frac{bt}{2} P_n^*(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{bt}{2}\, e^{-inu} \psi_t(u)\, du.$$

Сделав замену $x = \frac{bt}{2} u$, найдем, что

$$2\pi \frac{bt}{2} P_n^*(t) = \int_{-\pi\frac{bt}{2}}^{\pi\frac{bt}{2}} e^{-ixz_{n,t}} \psi_t\left(\frac{2x}{bt}\right) dx.$$

Кроме того, нам известно, что

$$2\pi e^{-z_{n,t}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz_{n,t}x} \frac{1}{1 - ix}\, dx.$$

Нам нужно оценить при $t \to \infty$ разность

$$R_n(t) = \left(\frac{bt}{2} P_n^*(t) - e^{-z_{n,t}}\right) 2\pi.$$

С этой целью представим $R_n(t)$ в виде суммы четырех интегралов, $R_n(t) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, где

$$I_1 = \int\limits_{-\eta(t)}^{\eta(t)} e^{-iz_{n,t}x}\left[\psi_t\left(\frac{2x}{bt}\right) - \frac{1}{1-ix}\right]dx, \qquad I_2 = \int\limits_{\eta(t)\leqslant|x|\leqslant\varepsilon\frac{bt}{2}} e^{-iz_{n,t}x}\psi_t\left(\frac{2x}{bt}\right)dx,$$

$$I_3 = \int\limits_{\varepsilon\frac{bt}{2}\leqslant|x|\leqslant\pi\frac{bt}{2}} e^{-iz_{n,t}x}\psi_t\left(\frac{2x}{bt}\right)dx, \qquad I_4 = -\int\limits_{|x|>\eta(t)} e^{-z_{n,t}x}\frac{1}{1-ix}\,dx.$$

Входящие сюда функция $\eta(t)$ и положительное число ε будут выбраны позднее. Будем оценивать эти интегралы при $t\to\infty$.

1. Оценим I_1

$$|I_1| \leqslant \int\limits_{-\eta(t)}^{\eta(t)} \left|\psi_t\left(\frac{2x}{bt}\right) - \frac{1}{1-ix}\right|dx.$$

Оценивая по лемме 3 модуль разности, стоящей под интегралом, получим

$$|I_1| \leqslant 2\eta(t)\,O\left(\frac{\ln t}{t}\right) = O\left[\frac{\eta(t)\ln t}{t}\right]. \tag{19}$$

2. Для оценки I_2 заметим, что поскольку $S_t(y)$ имеет конечный второй момент, для функции $\psi_t\left(\frac{2x}{bt}\right)$ в достаточно малой окрестности точки $x=0$, мы можем написать разложение*

$$\ln\psi_t\left(\frac{2x}{bt}\right) = i\,\frac{2x}{bt}\,M^*\mu_t - \frac{1}{2}\,\frac{4x^2}{b^2t^2}\,D^*\mu_t + o\left(\frac{x^2}{t^2}\right). \tag{20}$$

Вычисляя $D^*\mu_t$ с помощью уравнения (4), можно показать, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{4D^*\mu_t}{b^2t^2} = 1. \tag{21}$$

Из (20) и (21) следует, что для достаточно больших t можно подобрать $\varepsilon>0$ так, чтобы в области $\left|\frac{2x}{bt}\right|<\varepsilon$ выполнялось неравенство

$$\left|\psi_t\left(\frac{2x}{bt}\right)\right| \leqslant \exp\left[-\frac{x^2}{2}\cdot\frac{4D^*\mu_t}{b^2t^2} + o(\varepsilon^2)\right] < e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

Отсюда для I_2 получим

$$|I_2| \leqslant 2\int\limits_{\eta(t)}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4}}dx \leqslant 2\int\limits_{\eta(t)}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{4}}dx = 4e^{-\frac{\eta^2(t)}{4}}; \tag{22}$$

3. Интеграл I_3 перепишем в следующем виде:

$$I_3 = \int\limits_{\varepsilon\leqslant|u|\leqslant\pi} \frac{bt}{2}\,e^{-inu}\psi_t(u)\,du.$$

Воспользовавшись леммой 2, в которой положим $x = e^{iu}$, получим:

$$I_3 = \int\limits_{\varepsilon\leqslant|u|\leqslant\pi} \frac{bt}{2}\,e^{-inu}\left[\frac{1}{t}\int\limits_0^{e^{iu}}\frac{d\tau}{f(\tau)} + O\left(\frac{\ln^2 t}{t^2}\right)\right]du =$$

$$= \frac{b}{2}\int\limits_{\varepsilon\leqslant|u|\leqslant\pi} e^{-inu}\left[\int\limits_0^{e^{iu}}\frac{d\tau}{f(\tau)}\right]du + O\left(\frac{\ln^2 t}{t}\right).$$

---

* Под $M^*\mu_t$ и $D^*\mu_t$ понимаются соответственно математическое ожидание и дисперсия распределения $\{P_n^*(t)\}$.

Оставшаяся часть интеграла I_3 оценивается так:

$$\frac{b}{2}\int\limits_{\varepsilon\leqslant|u|\leqslant\pi} e^{-inu}\left[\int\limits_0^{e^{in}}\frac{d\tau}{f(\tau)}\right]du=\frac{bi}{2n}\left[e^{-inu}\int\limits_0^{e^{iu}}\frac{d\tau}{f(\tau)}\right]_{\varepsilon}^{\pi}+$$

$$+\frac{bi}{2n}\left[e^{-inu}\int\limits_0^{e^{iu}}\frac{d\tau}{f(\tau)}\right]_{-\pi}^{-\varepsilon}+\frac{b}{2n}\int\limits_{\varepsilon\leqslant|u|\leqslant\pi}\frac{e^{iu\varepsilon}}{f(e^{iu})}e^{-inu}\,du=O\left(\frac{1}{n}\right),$$

так как $f(e^{iu})\neq 0$ при $\varepsilon\leqslant|u|\leqslant\pi$ (см. [4] лемма 2), и следовательно, все функции, входящие в последние равенства, ограничены. Учитывая, что $0<c_1\leqslant\frac{2n}{bt}\leqslant c_2$, получим:

$$I_3=O\left(\frac{\ln^2 t}{t}\right) \tag{23}$$

при $t\to\infty$.

4. Интегрируя I_4 один раз по частям и учитывая, что $z_{n,t}\geqslant c_1>0$, получим при $t\to\infty$

$$I_4=O\left(\frac{1}{\eta(t)}\right). \tag{24}$$

Собирая оценки (19), (22), (23), (24), получим

$$R_n(t)=O\left[\frac{\eta(t)\ln t}{t}\right]+O\left(e^{-\frac{\eta^2(t)}{4}}\right)+O\left(\frac{\ln^2 t}{t}\right)+O\left(\frac{1}{\eta(t)}\right).$$

Выберем $\eta(t)$ так, чтобы разность была наименьшей. Для этого положим $\eta(t)=\sqrt{\frac{t}{\ln t}}$. Получим $R_n(t)=O\left(t^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\ln t}\right)$. Теорема 1 доказана.

Пример. Пусть $f(x)=\frac{(x-1)^2}{2}$. Здесь $a=0$, $b=1$.

Решая уравнение $\frac{dF}{dt}=\frac{(F-1)^2}{2}$ при граничном условии $F(0,x)=x$, получим

$$F(t,x)=1-\frac{2}{t+\frac{2}{1-x}}=1-\frac{2}{t+2}+\frac{2}{t+2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{t}{t+2}\right)^{k-1}-\left(\frac{t}{t+2}\right)^{k}\right]x^k.$$

Отсюда

$$P_0(t)=1-\frac{2}{t+\frac{2}{1-x}},$$

$$P_n(t)=\frac{2}{t+2}\left[\left(\frac{t}{t+2}\right)^{n-1}-\left(\frac{t}{t+2}\right)^{n}\right],$$

$$Q(t)=\frac{2}{t+2}.$$

Для условных вероятностей получим $P_n^*(t)=\left(\frac{t}{t+2}\right)^{n-1}-\left(\frac{t}{t+2}\right)^{n}$ или при $t\to\infty$ и $0<c_1<\frac{2n}{bt}<c_2$

$$P_n^*(t)=\frac{2}{t}e^{-z_{n,t}}\left[1-\frac{1}{t}+O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right],\ \text{где}\ z_{n,t}=\frac{2n}{t}.$$

Отсюда

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{t}{2}P_n^*(t)}{\frac{1}{z_{n,t}}e^{-z_{n,t}}}=1.$$

В этом примере разность убывает довольно быстро, так как, начиная с третьего все факториальные моменты равны 0.

§ 3. Некоторые свойства распределения $S_2(y)$

В работе Б. А. Севастьянова [1] установлено, что распределение $S_t(y) = \mathbf{P}\left\{\frac{\mu_t}{M^*(t)} < y \mid \mu_t > 0\right\}$ в случае $a > 0$ и $b < \infty$ при $t \to \infty$ сходится к некоторому предельному распределению $S_2(y)$. Доказано, что $S_2(y)$ непрерывно. Harris в работе [5] подробно изучил свойства аналогичного предельного распределения для ветвящихся процессов с дискретным временем. В частности, им было доказано существование плотности предельного распределения. Существование плотности может быть доказано и для ветвящихся процессов с непрерывным временем.

Лемма 4. *Характеристическая функция $\psi(\tau)$ распределения $S_2(y)$ удовлетворяет уравнению*

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{a\tau(1-\lambda)} f[u(\tau_1)], \quad \text{где } \tau_1 = (1-\lambda)\tau.$$

Доказательство. В уравнении (1) положим $x = e^{i\tau_1 e^{-a(t+s)}}$ и, устремив s к бесконечности, получим

$$u(\tau_1) = F[t, u(\tau_1 e^{-at})].$$

Преобразуя правую часть этого равенства по формуле (3), получим при $t \to 0$

$$u(\tau_1) = u(\tau_1 e^{-at}) + f[u(\tau_1 e^{-at})] + o(t).$$

Отсюда

$$\frac{u(\tau_1) - u(\tau_1 e^{-at})}{\tau_1 - \tau_1 e^{-at}} \cdot \frac{\tau_1(1-e^{-at})}{t} = f[u(\tau_1 e^{-at})] + o(1).$$

Устремив t к нулю, имеем

$$a\tau_1 \frac{du(\tau_1)}{d\tau_1} = f[u(\tau_1)].$$

Произведя в последнем уравнении замену $\tau_1 = (1-\lambda)\tau$, получим

$$a\tau \frac{du[(1-\lambda)\tau]}{d\tau} = f[u((1-\lambda)\tau)].$$

Из последнего равенства следует утверждение леммы 4. При $|\tau| \to \infty$ и $|(1-\lambda)\tau| \to \lambda$, так как $|\psi(\tau)| \to 0$ (см. [1], стр. 74). Используя лемму 4, можно получить

Следствие. *При $|\tau| \to \infty$ справедливы оценки*

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = o\left(\frac{1}{|\tau|}\right) \quad \text{и} \quad \frac{d^2\psi(\tau)}{d\tau^2} = o\left(\frac{1}{|\tau|^2}\right).$$

Теорема 2. *Предельное распределение $S_2(y)$ имеет плотность $s(y)$, непрерывную при $y > 0$.*

Доказательство. Рассмотрим функции

$$s_t(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-t}^{t} e^{-i\tau y} \psi(\tau)\, d\tau, \qquad (25)$$

где $\psi(\tau)$ — характеристическая функция предельного распределения $S_2(y)$. Покажем сначала, что последовательность функций $s_t(y)$ при $t \to \infty$ сходится равномерно по y в $0 < c_1 \leqslant y \leqslant c_2$ к некоторой функции $s(y)$.

Двукратное интегрирование по частям правой части равенства (25) дает

$$s_t(y) = -\frac{1}{2\pi iy}\left[\psi(t)e^{-ity} - \psi(-t)e^{ity}\right] + \frac{1}{4\pi^2 y^2}\left[\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} e^{-i\tau y}\right]_{-t}^{t} -$$

$$-\frac{1}{4\pi^2 y^2}\int_{-t}^{t} e^{-i\tau y}\,\frac{d^2\psi(\tau)}{d\tau^2}\,d\tau.$$

Первые два слагаемые равномерно по y при $t\to\infty$ сходятся к 0 на основании следствия из леммы 4. Покажем, что $\frac{1}{y^2}\int_{-t}^{t} e^{-i\tau y}\frac{d^2\psi}{d\tau^2}\,d\tau$ сходится равномерно по y. Рассмотрим разность

$$R_{t,y}=\frac{1}{y^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau y}\,\frac{d^2\psi}{d\tau^2}\,d\tau-\frac{1}{y^2}\int_{-t}^{t} e^{-i\tau y}\,\frac{d^2\psi}{d\tau^2}\,d\tau=\frac{1}{y^2}\int_{|\tau|>t} e^{-i\tau y}\,\frac{d^2\psi}{d\tau^2}\,d\tau.$$

Используя следствие из леммы 4, получим

$$|R_{t,y}|\leqslant\frac{1}{c_1^2}\cdot\int_{|\tau|>t}|e^{-i\tau y}|\cdot\left|\frac{d^2\psi(\tau)}{d\tau^2}\right|d\tau<C\int_{t}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau^2}=\frac{C}{t},$$

где C — некоторая постоянная, не зависящая от y. Равномерная сходимость доказана. Следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} s_t(y)=s(y)$, где $s(y)$ — непрерывная функция для $y>0$ в силу равномерной сходимости и непрерывности функций $s_t(y)$.

Покажем, что $s(y)$ есть плотность распределения $S_2(y)$. Пусть $0<c_1\leqslant y_1<y_2\leqslant c_2$. По формуле обращения имеем

$$S_2(y_2)-S_2(y_1)=\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t}\frac{e^{-i\tau y_2}-e^{-i\tau y_1}}{-2\pi i\tau}\,\psi(\tau)\,d\tau,$$

но

$$\int_{-t}^{t}\frac{e^{-i\tau y_2}-e^{-i\tau y_1}}{-2\pi i\tau}\,\psi(\tau)\,d\tau=\int_{y_1}^{y_2} s_t(\tau)\,d\tau.$$

Следовательно, в силу равномерной сходимости $s_t(y)$ получим

$$S_2(y_2)-S_2(y_1)=\lim_{t\to\infty}\int_{y_1}^{y_2} s_t(y)\,dy=\int_{y_1}^{y_2} s(y)\,dy.$$

Теорема 2 доказана.

§ 4. Локальная предельная теорема в случае $a>0$

В случае $a>0$ возможно, что для некоторых n вероятности $P_n(t)\equiv 0$. Обозначим через h наибольший общий делитель попарных разностей индексов n, для которых $p_n\neq 0$. Пусть h_t — максимальный шаг распределения случайной величины μ_t. Покажем, что $h_t=h$.

Если $p_n>0$, то $P_n(t)>0$ для любого $t>0$. Отсюда следует $h_t\leqslant h$. Предположим, что $h_t<h$. Непосредственная проверка дает $f\left(e^{i\frac{2\pi}{h}}\right)=0$. Из уравнения $\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}=f(x)\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}$, полагая $x=e^{i\frac{2\pi}{h}}$, найдем

$$F\left(t,\,e^{i\frac{2\pi}{h}}\right)=e^{i\frac{2\pi}{h}}. \tag{26}$$

$F(t,e^{iu})$ — характеристическая функция случайной величины μ_t, которая имеет решетчатое распределение с максимальным шагом $h_t<h$. На основании [2] (§ 14, след-

ствие 2 теоремы 5) получим

$$\left| F\left(t, e^{i\frac{2\pi}{h}}\right)\right| < 1, \tag{27}$$

т. к. $0 < \frac{2\pi}{h} < \frac{2\pi}{h_t}$. Неравенство (27) противоречит (26). Следовательно, $h_t = h$.

Если $p_0 > 0$, то $h_t = 1$. Максимальный шаг распределения h_t не обязательно равен единице, если $a > 0$ и $\lambda = 0$.

В этом случае

$$P_n^*(t) \equiv 0 \text{ для } n \not\equiv hk + 1 \ (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Теорема 3. *Пусть $s(y)$ — плотность предельного распределения $S_2(y)$. Обозначим $(1-\lambda)e^{-at}n = z_{n,t}$. Если $a > 0$ и $b < \infty$, то при $t \to \infty$ и $0 < c_1 \leqslant z_{n,t} \leqslant c_2$* имеем

$$\frac{e^{at}}{1-\lambda} P_n^*(t) = \begin{cases} hs(z_{n,t}) + o(1), & n \equiv 1 \pmod h, \\ 0, & n \not\equiv 1 \pmod h. \end{cases}$$

Сначала докажем две леммы.

Лемма 5. *Если $a > 0$, то $F(t, e^{iu}) \to \lambda$ при $t \to \infty$ равномерно по u на отрезке $\varepsilon \leqslant |u| \leqslant \frac{\pi}{h}$.*

Доказательство. Пусть $t > s$. Из основного функционального уравнения имеем $F(t, e^{iu}) = F[t-s, F(s, e^{iu})]$. Но $F(s, e^{iu})$ — характеристическая функция случайной величины μ_s, а так как h — максимальный шаг распределения, то найдется такое $r = r(\varepsilon) < 1$, что $|F(s, e^{iu})| < r$ при $\varepsilon \leqslant |u| \leqslant \frac{\pi}{h}$ (см. [2], § 14, следствие 2 теоремы 5).

Оценим разность $F(t, e^{iu}) - \lambda$:

$$|F(t, e^{iu}) - \lambda| = |F[t_1, F(s, e^{iu})] - \lambda| \leqslant |P_0(t_1) - \lambda| + \left| \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t_1)[F(s, e^{iu})]^k \right| \leqslant$$

$$\leqslant |P_0(t_1) - \lambda| + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t_1) r^k, \text{ где } t_1 = t - s.$$

При $t \to \infty$ имеем $P_0(t_1) \to \lambda$. Покажем, что $\sum_{k=1}^{\infty} P_k(t_1) r^k \to 0$ при $t \to \infty$. Из интегральной предельной теоремы следует, что $P_k(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Под знаком суммы можно перейти к пределу, т. к. $|P_k(t)| \leqslant 1$ и $\sum_{k=1}^{\infty} r^k < \infty$. Отсюда следует, что $\sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) r^k \to 0$ при $t \to \infty$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Если $a > 0$, то $\frac{d\psi_t(u)}{du} \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по u, когда $\varepsilon \leqslant |u| \leqslant \frac{\pi}{h}$.*

Доказательство. Для $\psi_t(u)$ имеем

$$\psi_t(u) = \frac{F(t, x) - F(t, 0)}{Q(t)}, \text{ где } x = e^{iu}.$$

Отсюда

$$\frac{d\psi_t(u)}{du} = \frac{1}{Q(t)} \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} \frac{dx}{du}.$$

Используя основное функциональное уравнение, получим

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} k[F(s, x)]^{k-1} P_k(t-s) \right] \frac{\partial F(s, x)}{\partial x}. \tag{28}$$

Но $F(s, e^{iu})$ — характеристическая функция случайной величины μ_s. Следовательно,

$|F(s, e^{iu})| \leqslant r < 1$, если $\varepsilon \leqslant |u| \leqslant \frac{\pi}{h}$. Из равенства (28) следует

$$\left|\frac{\partial F(t, x)}{\partial x}\right| \leqslant \left|\frac{\partial F(s, x)}{\partial x}\right| \sum_{k=1}^{\infty} k r^{k-1} P_k(t-s).$$

Под знаком суммы можно перейти к пределу при $t \to \infty$, так как $|P_k(t-s)| \leqslant 1$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k r^{k-1} < \infty$. Отсюда, ввиду того, что $\left|\frac{\partial F(s, x)}{\partial x}\right| \leqslant e^{as}$ и $P_k(t-s) \underset{t\to\infty}{\to} 0$, следует

$$\left|\frac{\partial F(t, x)}{\partial x}\right| \to 0 \text{ при } t \to \infty \text{ и } x = e^{iu}, \text{ где } \varepsilon \leqslant |u| \leqslant \frac{\pi}{h}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.

Используя формулу обращения для случая, когда $h \geqslant 1$ так же, как при доказательстве теоремы 1, получим

$$\frac{e^{at}}{1-\lambda} P_n^*(t) = \frac{h}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}\frac{e^{at}}{1-\lambda}}^{\frac{\pi}{h}\frac{e^{at}}{1-\lambda}} \psi_t[x(1-\lambda)e^{-at}]\, e^{-ixz_{n,t}}\, dx \tag{29}$$

и

$$hs(z_{n,t}) = \frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, e^{-iz_{n,t}x}\, dx, \tag{30}$$

где

$$\psi_t(\tau) = \frac{1}{Q(t)} \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t)\, e^{i\tau k} \quad \text{и} \quad \psi(\tau) = \frac{u[(1-\lambda)\tau] - \lambda}{1-\lambda}.$$

Разность между (29) и (30) представим в виде суммы четырех интегралов

$$R_n(t) = \frac{e^{at}}{1-\lambda} P_n^*(t) - hs(z_{n,t}) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \frac{h}{2\pi} \int_{-A}^{A} e^{-iz_{n,t}x} [\psi_t(x(1-\lambda)e^{-at}) - \psi(x)]\, dx,$$

$$I_2 = \frac{h}{2\pi} \int_{A \leqslant |x| \leqslant \varepsilon_1 \frac{e^{at}}{1-\lambda}} e^{-iz_{n,t}x} \psi_t[x(1-\lambda)e^{-at}]\, dx,$$

$$I_3 = \frac{h}{2\pi} \int_{\varepsilon_1 \leqslant |u| \leqslant \frac{\pi}{h}} \frac{e^{at}}{1-\lambda} \psi_t(u)\, e^{-inu}\, du, \quad I_4 = -\frac{h}{2\pi} \int_{|x|>A} e^{-iz_{n,t}x} \psi(x)\, dx.$$

Постоянные ε_1 и A будут выбраны позднее. Покажем, что найдется такое t_0, что для $t > t_0$ выполняется $|R_n(t)| < \varepsilon$. Будем оценивать выписанные выше интегралы.

1. Для I_1:

$$|I_1| \leqslant \frac{h}{2\pi} \int_{-A}^{A} |\psi_t[x(1-\lambda)e^{-at}] - \psi(x)|\, dx.$$

Оценим подинтегральное выражение. $\psi_t[x(1-\lambda)e^{-at}]$ — характеристическая функция распределения $\overline{S}_t(y) = \mathbf{P}\left\{\frac{\mu_t(1-\lambda)}{e^{at}} < y \,\middle|\, \mu_t > 0\right\}$. По интегральной предельной теореме для случая $a > 0$ имеем $\overline{S}_t(y) \to S_2(y)$ при $t \to \infty$. Следовательно, $\psi_t[x(1-\lambda)e^{-at}]$

в любом конечном интервале при $t \to \infty$ равномерно по x сходится к $\psi(x)$. Поэтому найдется t_1 такое, что для $t > t_1$ выполняется неравенство

$$|\psi_t[x(1-\lambda)e^{-at}] - \psi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon\pi}{4A}.$$

Таким образом, для I_1 имеем

$$|I_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \text{ при } t > t_1. \tag{31}$$

2. Так же, как и в теореме 1, для $\psi_t[x(1-\lambda)e^{-at}]$ имеем $|\psi_t[x(1-\lambda)e^{-at}]| \leqslant e^{-\frac{x^2}{2}D^*\mu_t[(1-\lambda)e^{-at}]^2} + o(\varepsilon_1^2)$.

Получив из уравнения (4) для первых и вторых моментов явные выражения, можно доказать, что

$$\lim_{t\to\infty}(D^*\mu_t)[1-\lambda)e^{-at}]^2 = (1-\lambda)\frac{b}{a} - 1.$$

Покажем, что $(1-\lambda)\frac{b}{a} - 1 > 0$. Если $\lambda = 0$, то это неравенство очевидно. Пусть $\lambda > 0$.

Преобразуем $f(x)$ так

$$f(x) = f_1\left(\frac{x-\lambda}{1-\lambda}\right) = f_1(x_1).$$

Коэффициенты при x_1^n в разложении $f_1(x_1)$ по степеням x_1 для $n \geqslant 2$ неотрицательны. Поэтому $b_1 > a_1$, где $a_1 = f_1'(x_1)$, $b_1 = f_1''(x_1)$. Заметив, что $a_1 = (1-\lambda)a$ и $b_1 = (1-\lambda)^2 b$, получим $(1-\lambda)^2 b > (1-\lambda)a$. Отсюда и следует неравенство $(1-\lambda)\frac{b}{a} - 1 > 0$. Обозначив $(1-\lambda)\frac{b}{a} - 1 = c^2$ и выбрав ε_1 достаточно малым, подберем t_2 так, чтобы при $t > t_2$ выполнялось неравенство

$$|\psi_t[x(1-\lambda)e^{-at}]| \leqslant e^{-\frac{x^2}{4}c^2}.$$

Отсюда для достаточно больших A получим

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{32}$$

3. Проинтегрируем I_3 по частям

$$I_3 = \frac{h}{2\pi}\frac{e^{at}}{1-\lambda}\frac{i}{n}\left[\psi_t(u)e^{-inu}\right]_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{h}} + \frac{h}{2\pi}\frac{e^{at}}{1-\lambda}\frac{i}{n}\left[\psi_t(u)e^{-inu}\right]_{-\frac{\pi}{h}}^{-\varepsilon} -$$

$$- \frac{h}{2\pi}\frac{e^{at}}{1-\lambda}\cdot\frac{i}{n}\int\limits_{\varepsilon\leqslant|u|\leqslant\frac{\pi}{h}} e^{-inu}\frac{d\psi_t(u)}{dh}\,du.$$

Так как $0 < c_1\frac{e^{at}}{(1-\lambda)n} \leqslant c_2$ при $t \to \infty$, то на основании лемм 5 и 6 имеем $I_3 \to 0$ при $t \to \infty$, или для $t > t_3$

$$|I_3| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{33}$$

4. Проинтегрируем I_4 два раза по частям. На основании следствия из леммы 4 заключаем, что можно подобрать A так, что

$$|I_4| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{34}$$

Собирая оценки (31), (32), (33), (34), получим для $t > \max(t_1, t_2, t_3)$

$$|R_n(t)| < \varepsilon.$$

Теорема 3 доказана.

Пример. Пусть $f(x) = (1-x)(p-qx)$. Тогда (см. [1] стр. 62)

$$F(t, x) = \frac{p(1-x) + (qx-p)\,e^{(p-q)\,t}}{q(1-x) + (qx-p)\,e^{(p-q)\,t}}.$$

Для вероятностей имеем

$$P_0(t) = \lambda \frac{1-e^{-at}}{1-\lambda e^{-at}},$$

$$P_n(t) = (1-\lambda)^2 \frac{[1-e^{-at}]^{n-1}}{[1-\lambda e^{-at}]^{n+1}} \cdot e^{-at},$$

где $\lambda = \frac{p}{q}$ и $a = q - p$. Пусть $a > 0$. Положим $ne^{-at}(1-\lambda) = z_{n,t}$. Используя явные выражения для $P_n(t)$ и $P_0(t)$, можно вычислить, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{at}}{1-\lambda} P_n^*(t) = e^{-z_{n,t}}.$$
$$0 < c_1 \leqslant z_{n,t} \leqslant c_2$$

§ 5. Предельные теоремы для ветвящихся процессов с дискретным временем

Перепишем уравнение (1) в следующем виде:

$$F(t+1, x) = F[t, F(1, x)].$$

Введем обозначения

$$A = F'_x(1, 1), \quad B = F''_{xx}(1, 1).$$

Исключим из рассмотрения тривиальные случаи

1) $A = 0$; 2) $A = 1$, $B = 0$; 3) $B = A^2 - A$, $A > 1$.

Используя основное функциональное уравнение, можно получить $\mathrm{M}\mu_t = A^t$. Для случаев $A > 1$, $A = 1$, $A < 1$. А. М. Яглом в работе [3] получил предельные теоремы, аналогичные теоремам, приведенным во введении. Н. В. Смирнов для случая $A = 1$ получил локальную предельную теорему.

Harris в работе [5] установил существование плотности $s(y)$ распределения $S(y) = \lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\mu_t}{M^*(t)} < y \,\middle|\, \mu_t > 0\right\}$ в случае $A > 1$. Для этого случая можно получить локальную теорему,

Покажем сначала, что максимальный шаг распределения h_t случайной величины μ_t при любом $t > 0$ равен максимальному шагу распределения h величины μ_1. Если $P_n(1) > 0$, то можно показать, что $P_n(t) > 0$ для любого $t > 0$. Отсюда следует, что $h_t \leqslant h$. Если $P_0(1) > 0$, то $h = 1$ и ясно, что $h_t = h = 1$. Рассмотрим теперь случай, когда $P_0(1) = 0$. На основании [2] § 14 заключаем, что $|F(1, e^{iu})| < 1$ для $0 < |u| < \frac{2\pi}{h}$ и $F\left(1, e^{i\frac{2\pi}{h}}\right) = e^{i\frac{2\pi}{h}}$, так как возможные значения величины μ_t в этом случае могут быть записаны так: $n = kh_t + 1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Из уравнения $F(2, x) = F[1, F(1, x)]$, положив $x = e^{i\frac{2\pi}{h}}$, получим

$$\left|F\left(2, e^{i\frac{2\pi}{h}}\right)\right| = \left|e^{i\frac{2\pi}{h}}\right| = 1.$$

Если $h_2 < h$, то по [2] (§ 14 следствие 2 теоремы 5) должно выполняться $\left|F\left(2, e^{i\frac{2\pi}{h}}\right)\right| < 1$, т. к. $0 < \frac{2\pi}{h} < \frac{2\pi}{h_2}$, а h_2 — максимальный шаг распределения μ_2. Сле-

довательно, $h_2 \geqslant h$. Из двух неравенств $h_2 \leqslant h$ и $h_2 \geqslant h$ получим $h_2 = h$. По индукции можно показать, что $h = h_t$ для любого $t > 0$.

Теорема 4. *Пусть* $A > 1$ *и* $B < \infty$. *Обозначим* $z_{n,t} = n(1-\lambda)A^{-t}$, *где* λ — *наименьший неотрицательный корень уравнения* $F(1, x) = x$. *При* $t \to \infty$ *и* $0 < c_1 \leqslant z_{n,t} \leqslant c_2$

$$\frac{A^t}{1-\lambda} P_n^*(t) = \begin{cases} hs(z_{n,t}) + o(1) & \text{для } n \equiv 1 \pmod h, \\ 0 & \text{для } n \not\equiv 1 \pmod h. \end{cases}$$

Доказательство этой теоремы проходит так же, как доказательство теоремы 3.

Автор благодарен Б. А. Севастьянову, вниманию которого эта заметка обязана своим появлением.

Поступила в редакцию
25.4.57

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. А. Севастьянов, Теория ветвящихся случайных процессов, УМН, VI, вып. 6 (46) (1951).
[2]. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, 1949.
[3]. А. М. Яглом, Некоторые предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов, ДАН СССР, 56, № 8 (1947).
[4] В. М. Золотарев, Об одной задаче из теории ветвящихся случайных процессов, УМН, IX, вып 2 (60) (1954).
[5] T. E. Harris, Branching Processes, AMS, 19 (1948), 474—494.

LOCAL LIMIT THEOREMS FOR BRANCHING PROCESSES

V. P. ČISTYAKOV (MOSCOW)

(*Summary*)

Let μ_t be a continuous branching process and let us consider the function $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$, where $p_k = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{P}\{\mu_t = k\}}{t}$ $(k \neq 1)$ and $p_1 = \lim_{t \to 0} \frac{1 - \mathbf{P}\{\mu_t = 1\}}{t}$.

Denote:

$$a = f'(1),\ b = f''(1),\ c = f'''(1),\ d = f^{\mathrm{IV}}(1).$$

The following theorems are true:

1. *If* $a = 0$, b, c, d *are bounded, then when* $t \to \infty$ *and* $0 < c_1 \leqslant z_{n,t} \leqslant c_2$

$$\frac{bt}{2} P_n^*(t) = e^{-z_{n,t}} + O\left(t^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\ln t}\right),$$

where $P_n^*(t) = \frac{\mathbf{P}\{\mu_t = n\}}{1 - \mathbf{P}\{\mu_t = 0\}}$ *and* $z_{n,t} = \frac{2n}{bt}$,

2. *Let* $a > 0$ *and* $b < \infty$. *If* $t \to \infty$ *and* $0 < c_1 \leqslant z_{n,t} \leqslant c_2$, *then*

$$\frac{e^{at}}{1-\lambda} P_n^*(t) = \begin{cases} hs(z_{n,t}) + o(1) & n \equiv 1 \pmod h \\ 0 & n \not\equiv 1 \pmod h, \end{cases}$$

where

a) λ *is the smallest non-negative real root of the equation* $f(x) = 0$;

b) $z_{n,t} = ne^{-at}(1-\lambda)$;

c) h *is the greatest common divisor for twin differences of indexes* n *for which* $p_n \neq 0$;

d) $s(y)$ *is the density of distribution* $S(y) = \lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\mu_t(1-\lambda)}{e^{at}} < y \,\middle|\, \mu_t > 0\right\}$.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том II Выпуск 3
1957

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Г. Ш. РУБИНШТЕЙН и К. УРБАНИК

Пусть N — множество пар натуральных чисел $\langle i, j\rangle$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$; M — некоторое непустое подмножество множества N. Через $\mathscr{P}_M$ мы будем обозначать класс всех систем $P = \{p_{ij}\}$ $(\langle i, j\rangle \in N)$, удовлетворяющих условиям

$$p_{ij} \geqslant 0 \text{ при } \langle i, j\rangle \in N,\ p_{ij} = 0 \text{ при } \langle i, j\rangle \in N \setminus M,\ \sum_{\langle i, j\rangle \in M} p_{i, j} = 1.$$

Положим

$$\Phi(P) = \sum_{\langle i, j\rangle \in N} p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} p_{i, k} \sum_{l=1}^{n} p_{l, j}}. * \tag{1}$$

В связи с вопросами теории информации А. Н. Колмогоров поставил следующую задачу: *найти максимальное значение функции* $\Phi(P)$ *при* $P \in \mathscr{P}_M$, т. е. $I(M) = \max_{P \in \mathscr{P}_M} \Phi(P)$.

В настоящей заметке докажем, что имеет место равенство

$$I(M) = \log r(M),$$

где $r(M)$ — максимальное число пар $\langle i_1, j_1\rangle$, $\langle i_2, j_2\rangle, \ldots, \langle i_5, j_5\rangle$, принадлежащих M* и стоящих в разных строках и столбцах, т. е. удовлетворяющих неравенствам $i_k \neq i_l$, $j_k \neq j_l$ при $k \neq l$ $(k, l = 1, 2, \ldots, 5)$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что если система $P = \{p_{i, j}\} \in \mathscr{P}_M$ содержит хотя бы два не равные нулю элемента с равными индексами i или j, то можно найти систему $P' = \{p'_{i, j}\} \in \mathscr{P}_M$ с меньшим числом отличных от нуля элементов такую, что

$$\Phi(P') \geqslant \Phi(P). \tag{2}$$

Пусть, например, $i_0 \neq i_1$ и

$$p_{i_0, j_0} > 0,\ p_{i_1, j_0} > 0 \tag{3}$$

(в случае $p_{i_0, j_0} > 0$, $p_{i_0, j_1} > 0$ при $j_0 \neq j_1$ доказательство аналогично). Положим

$$X_i = \sum_{k=1}^{n} p_{i, k} - p_{i, j_0} \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Не уменьшая общности, можно считать, что

$$X_{i_0} \leqslant X_{i_1}. \tag{4}$$

---

* При $p_{i, j} = 0$ принимаем $p_{i, j} \log \frac{p_{i, j}}{\sum_{k=1}^{n} p_{i, k} \sum_{l=1}^{n} p_{l, j}} = 0.$

Определяем систему P' равенствами

$$p'_{i_0,\,j_0} = p_{i_0,j_0} + p_{i_1,j_0},$$
$$p'_{i_1,\,j_0} = 0,$$

$p_{i,i} = p_{i,j}$ при остальных $\langle i, j\rangle \in N$. Непосредственно очевидно, что $P' \in \mathscr{P}_M$ и

$$\Phi(P') - \Phi(P) = (p_{i_0,j_0} + p_{i_1,j_0}) \log (p_{i_0,j_0} + p_{i_1,j_0}) +$$
$$+ (X_{i_0} + p_{i_0,j_0}) \log (X_{i_0} + p_{i_0,j_0}) + (X_{i_1} + p_{i_1,j_0}) \log (X_{i_1} + p_{i_1,j_0}) -$$
$$- (X_{i_0} + p_{i_0,j_0} + p_{i_1,j_0}) \log (X_{i_0} + p_{i_1,j_0} + p_{i_1,j_0}) - X_{i_1} \log X_{i_1} -$$
$$- p_{i_0,j_0} \log p_{i_0,j_0} - p_{i_1,j_0} \log p_{i_1,j_0}. \tag{5}$$

Если $X_{i_1} = 0$, то из последней формулы и (4) вытекает $\Phi(P') = \Phi(P)$. Пусть теперь $X_{i_1} > 0$. Тогда, в силу формул (3) и (5), получаем равенство

$$\Phi(P') - \Phi(P) = \log A_1 + p_{i_1,j_0} \log A_2 + p_{i_0,j_0} \log A_3, \tag{6}$$

где

$$A_1 = \frac{\left(1 + \dfrac{p_{i_1,j_0}}{X_{i_1}}\right)^{X_{i_1}}}{\left(1 + \dfrac{p_{i_1,j_0}}{X_{i_0} + p_{i_0,j_0}}\right)^{X_{i_0}}}, \qquad A_2 = \frac{1 + \dfrac{X_{i_1}}{p_{i_1,j_0}}}{1 + \dfrac{X_{i_0}}{p_{i_0,j_0} + p_{i_1,j_0}}}, \qquad A_3 = \frac{1 + \dfrac{X_{i_0}}{p_{i_0,j_0}}}{1 = \dfrac{X_{i_0}}{p_{i_0,j_0} + p_{i_1,j_0}}}.$$

Из неравенств (3) и (4) следует

$$\left(1 + \frac{p_{i_1,j_0}}{X_{i_1}}\right)^{X_{i_1}} \geqslant \left(1 + \frac{p_{i_1,j_0}}{X_{i_0}}\right)^{X_{i_0}} > \left(1 + \frac{p_{i_1,j_0}}{X_{i_0} + p_{i_0,j_0}}\right)^{X_{i_0}} \quad \text{при } X_{i_0} > 0,$$

$$\left(1 + \frac{p_{i_1,j_0}}{X_{i_1}}\right)^{X_{i_1}} > 1 = \left(1 + \frac{p_{i_1,j_0}}{X_{i_0} + p_{i_0,j_0}}\right)^{X_{i_0}} \quad \text{при } X_{i_0} = 0,$$

$$1 + \frac{X_{i_1}}{p_{i_1,j_0}} > 1 + \frac{X_{i_0}}{p_{i_0,j_0} + p_{i_1,j_0}}.$$

Следовательно, $A_1 > 1$ и $A_2 > 1$. Неравенство $A_3 \geqslant 1$ очевидно. Отсюда в силу формулы (6) получаем неравенство (2).

Таким образом мы доказали, что максимум функции $\Phi(P)$ при $P \in \mathscr{P}_M$ достигается на некоторой системе $Q = \{q_{i,j}\} \in \mathscr{P}_M$, обладающей свойством

$$q_{i_s,j_s} > 0 \qquad \text{при} \qquad s = 1, 2, \ldots, r$$
$$q_{i,j} = 0 \quad \text{при остальных} \quad \langle i,j\rangle \in N, \tag{7}$$

и

$$i_k \neq i_l \quad j_k \neq j_l \quad \text{при} \quad k \neq l \quad (k, l = 1, 2, \ldots, r).$$

Поскольку $Q \in \mathscr{P}_M$, то $\langle i_s, j_s\rangle \in M$ $(s = 1, 2, \ldots, r)$. Следовательно, в силу определения числа $r(M)$, имеет место неравенство

$$r \leqslant r(M). \tag{8}$$

Из формул (1) и (7) вытекает

$$J(M) = \Phi(Q) = -\sum_{s=1}^{r} q_{i_s,j_s} \log q_{i_s,j_s} \leqslant \log r.$$

Отсюда и из неравенства (8) получаем

$$J(M) \leqslant \log r(M). \tag{9}$$

В силу определения числа $r(M)$ существует совокупность пар $\langle i_1, j_1\rangle, \langle i_2, j_2\rangle, \ldots$ $\ldots, \langle i_{r(M)}, j_{r(M)}\rangle$, принадлежащих M и стоящих в разных строках и столбцах. Положим

$$\overline{p}_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{1}{r(M)} & \text{при } i = i_k,\ j = j_k\ (k = 1, 2, \ldots, r(M)), \\ 0 & \text{при остальных } \langle i, j\rangle \in N. \end{cases}$$

Очевидно, что $\overline{P} = \{\overline{p}_{i,j}\} \in \mathscr{P}_M$ и $\Phi(\overline{P}) = \log r(M)$. Следовательно, $J(M) \geqslant \log r(M)$. Отсюда и из неравенства (9) вытекает формула (*).

Поступила в редакцию
7. 5. 57

SOLUTION OF AN EXTREMAL PROBLEM

G. Š. RUBINSTEIN *(LENINGRAD) and* **K. URBANIK** *(WROSLAW)*

(Summary

Let N be a set of pairs of integers $\langle i, j\rangle$ $(i, j = 1, 2, \ldots, h)$, and M — a non-empty subset of N. We shall denote by $\mathscr{P}_M$ the class of all systems $P = \{p_{ij}\}$ $(\langle i, j\rangle \in N)$ satisfying the following conditions:

$$p_{ij} \geqslant 0 \text{ for } \langle i, j\rangle \in N,\ p_{ij} = 0 \text{ for } \langle i, i\rangle \in N \setminus M,\ \sum_{\langle i,j\rangle \in M} p_{ij} = 1.$$

Let

$$\Phi(P) = \sum_{\langle i,j\rangle \in N} p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} p_{ik} \sum_{l=1}^{n} p_{ej}}.$$

The following theorem is proved:

$$\max_{P \in \mathscr{P}_M} \Phi(P) = \log r(M),$$

where $r(M)$ is the greatest number of pairs $\langle i_1, j_1\rangle, \langle i_2, j_2\rangle, \ldots, \langle i_s, j_s\rangle$ belonging to M, such that

$$i_k \neq i_l > i_k \neq j_l \quad \text{for} \quad k \neq l\ (k, l = 1, 2, \ldots, s).$$

This is an answer to a problem raised by A. N. Kolmogorov.

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ОДНОРОДНЫХ СЧЕТНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Р. Л. ДОБРУШИН

Будем называть марковским процессом с состояниями E_i; $i = 1, 2, \ldots$, систему переходных вероятностей $p_{ij}(t)$; $i = 1, 2, \ldots$; $j = 1, 2, \ldots$, $0 \leqslant t < \infty$, удовлетворяющих уравнениям Колмогорова — Чапмена (см. [1]). Будем говорить, что процесс имеет переходные плотности a_{ij}, $i \neq j$, если $p_{ij}(0) = \delta_i^j$ и производные $p'_{ij}(0) = a_{ij}$, $i \neq 0$, $p'_{ii}(0) = -a_i$, где $a_i = \sum_{i \neq j} a_{ij} < \infty$. Рассматривается задача нахождения всех марков-

ских процессов, имеющих заданную систему переходных плотностей $\{a_{ij}\}$. До сих пор эта задача была полностью решена Феллером [2] (см. так же [3]) для регулярного случая, когда существует ровно один процесс с заданными $\{a_{ij}\}$. Дуб [4], Леви [5], Кендалл [6] и другие изучали на разных уровнях строгости и общности различные классы примеров нерегулярных процессов. Здесь дается полное описание процессов, для которых плотности $\{a_{ij}\}$ удовлетворяют двум условиям: условию отсутствия начал и условию конечности числа концов. *Условие отсутствия начал* состоит в том, что не должна существовать последовательность неповторяющихся состояний E_{i_k} такая, что $a_{i_{k+1}, i_k} > 0$ для всех k. Рассмотрим дискретную цепь Маркова с состояниями E_i и вероятностями перехода за один шаг $p_{ij} = a_{ij} / a_i$ (как известно, эта цепь задает переходы системы по состояниям нашего процесса до момента накопления скачков). Мы будем говорить, что *процесс имеет* $n < \infty$ *концов* $R_1, \dots, R_n$, если все состояния E_i можно разбить на n непересекающихся подмножеств $R_1, \dots, R_n$ так, чтобы, если обозначить через D_R событие, состоящее в том, что для всех достаточно больших моментов времени выборочная функция нашей цепи принадлежит множеству состояний R, то 1) $\mathbf{P}\{D_{R_i}\} > 0$; $i = 1, \dots, n$, 2) $\bigcup_{i=1}^{n} D_{R_i}$ является достоверным событием, 3) при $R \subset R_i$ вероятность $\mathbf{P}\{D_R\}$ равна или 0 или $\mathbf{P}\{D_{R_i}\}$. Подробное изучение введенного понятия можно найти в работе Блекуэлла [7].

Многие из формулируемых в работе фактов были высказаны впервые в виде гипотез в докладе Е. Б. Дынкиным (1955 г.). Нужно отметить существенные аналогии между некоторыми рассматриваемыми здесь процессами и диффузионными процессами, изученными Вентцелем [8]. Наконец, близким вопросам посвящена еще неопубликованная работа Феллера.

Можно построить вероятностное пространство Ω и на нем случайные величины $x(t, \omega)$, $0 \leqslant t < \infty$, принимающие значения $E_1, E_2, \dots$ и дополнительное значение $\bar{E}$, так, чтобы 1) $\mathbf{P}\{x(t, \omega) = \bar{E}\} = 0$ при любом фиксированном t, 2) процесс $x(t, \omega)$ был марковским с заранее заданными вероятностями перехода $p_{ij}(t)$, 3) для любого фиксированного k и любого ω множество значений t таких, что $x(t, \omega) = E_k$, является суммой некоторого числа непересекающихся замкнутых слева и открытых справа интервалов. В дальнейшем, говоря о свойствах выборочных функций, мы будем подразумевать только что описанные функции $x(t, \omega)$. Будем считать для простоты, что $\bar{E} \subset (R_i)$ при всех $i = 1, \dots, n$. Определим теперь $\tau(\omega)$ как наименьшую верхнюю грань значений t таких, что на отрезке $[0, t]$ функция $x(t, \omega)$ имеет лишь конечное число точек разрыва. Через D_i обозначим множество точек $\omega \in \Omega$ таких, что при некотором $a(\omega) < \tau(\omega)$ для всех $t \in [a(\omega), \tau(\omega))$ значение $x(t, \omega) \in R_i$. Будем говорить, что конец R_i процесса регулярен, если $\mathbf{P}\{\tau(\omega) < \infty \mid D_i\} = 1$, и нерегулярен, если эта вероятность 0. Оказывается, что все концы процесса делятся на регулярные и нерегулярные и это деление зависит лишь от a_{ij}, а не от начальных вероятностей $\mathbf{P}\{x(0, \omega) = E_i\}$. Пусть $\eta_i(\omega)$ — это момент i-ого по порядку разрыва $x(t, \omega)$ и $\xi_i = x(\eta_i, \omega)$. Тогда, если

$$\chi(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} [a_{\xi_i(\omega)}]^{-1},$$

то $\mathbf{P}\{\eta(\omega) < \infty \mid D_i\} = \mathbf{P}\{\tau(\omega) < \infty \mid D_i\}$. Будем считать для определенности, что концы $R_1, \dots, R_m$ — нерегулярны, а концы $R_{m+1}, \dots, R_n$ — регулярны. Будем говорить, что в момент s функция $x(t, \omega)$ делает скачок из R_i, если при некотором $\varepsilon > 0$ функция $x(t, \omega) \in R_i$ при всех $t \in [s - \varepsilon, s)$, но при любом $\varepsilon > 0$ на интервале $[s-\varepsilon, s)$ она принимает бесконечное число разных значений. Будем говорить, что в момент s функция $x(t, \omega)$ делает скачок в состояние E_j (соответственно, в конец R_j), если она делает в момент s скачок из некоторого R_i и $x(s, \omega) = E_j$ (соответственно, $x(s, \omega) = \bar{E}$) и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $u \in (s, s + \varepsilon)$ такое, что $x(u, \omega) = E_k$, где $E_k \in R_i$. Можно показать, что условная вероятность того, что в момент $\tau(\omega)$ происходит скачок в нерегулярный конец R_k, $k \leqslant m$ при условии, что он происходит из того же R_k не зависит от начальных вероятностей и может равняться 0 или 1. В первом случае конец R_k назовем простым, во втором — особым. Для определенности будем считать

особыми концы $R_1, \ldots, R_e$, $e \leqslant m$. (Подчеркнем, что, в отличие от свойства регулярности конца, свойство простоты конца не задается переходными плотностями.) Пусть G_k — событие, состоящее в том, что в момент $\tau(\omega)$ происходит скачок в R_k. Если конец R_k регулярен или прост, то можно показать, что $\mathbf{P}\{G_k\} = 0$. Далее, можно показать, что все особые концы однозначно разбиваются на α ($\alpha \leqslant e$) непересекающихся групп $S_1, \ldots, S_\alpha$, называемых нами связками концов так, что при любых начальных вероятностях, если $R_i \in S_j$ и $R_k \in S_j$, то $\mathbf{P}\{G_i \Delta G_k\} = 0$, а если $R_i \in S_j$, $R_k \in S_p$, $j \neq p$, то $\mathbf{P}\{G_i \cap G_j\} = 0$. (Здесь Δ — знак симметрической разности множеств.)

Для простого конца R_j, $j = l+1, \ldots, m$ обозначим через $q_i^{(j)}$; $i = 1, 2, \ldots$ (соответственно, через $r_i^{(j)}$, $i = 1, 2, \ldots, \alpha$) условную вероятность того, что в момент $\tau(\omega)$ происходит скачок в E_i (соответственно, в любой из концов связки S_i) при условии, что этот скачок происходит из R_j. Эти вероятности не зависят от начальных вероятностей и

$$\sum_{i=1}^{\infty} q_i^{(j)} + \sum_{i=1}^{\alpha} r_i^{(j)} = 1; \; j = l+1, \ldots, m. \tag{1}$$

Обозначим для любого целого положительного N через $\tau_N(\omega)$ случайную величину такую, что при $t \in (\tau(\omega), \tau_N(\omega))$ выборочная функция $x(t, \omega) = E_\beta$, где $\beta > N$, или $\overline{E}$, но $x(\tau_N(\omega), \omega) = E_\beta$, где $\beta \leqslant N$. Фиксировав связку S_j, положим ${}_{(N)}u_i^{(j)}$ равным условной вероятности того, что $x(\tau_N(\omega), \omega) = E_i$ при условии, что в момент $\tau(\omega)$ происходит скачок в связку S_j. Можно показать, что при любом k таком, что для всех N, начиная с некоторого, ${}_{(N)}u_k^{(j)} > 0$ (такие k существуют) существуют также не зависящие от начальных вероятностей пределы

$$u_i^{(j)} = \lim_{N \to \infty} \frac{{}_{(N)}u_i^{(j)}}{{}_{(N)}u_i^{(k)}}; \quad i = 1, 2, \ldots, j = 1, \ldots, \alpha. \tag{2}$$

При изменении k все числа $u_i^{(j)}$ умножаются на общую константу. Мы будем считать их определенными лишь с точностью до такой константы.

Пусть $\pi_i^j = \mathbf{P}\{D_j \mid x(0, \omega) = E_i\}$. Пусть

$$\chi_j(\omega) = \begin{cases} \chi(\omega), & \text{если } \chi(\omega) < 1 \text{ и } \omega \in \bigcup\limits_{R_k \in S_j} D_k, \\ 1, & \text{если } \chi(\omega) \geqslant 1 \text{ и } \omega \in \bigcup\limits_{R_k \in S_j} D_k, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть, наконец, $m_i^j = \mathbf{M}\{\chi_j(\omega) \mid x(0, \omega) = E_i\}$. Подчеркнем, что π_i^j и m_i^j определяются по переходным плотностям a_i^j. Тогда 1) Для любого $R_k \in S_j$ сумма

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i^{(j)} \pi_i^k = \infty. \tag{3}$$

2) Для любого $R_k \overline{\in} S_j$

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i^{(j)} \pi_i^k < \infty. \tag{4}$$

3) Сумма

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i^{(j)} m_i^{(j)} < \infty. \tag{5}$$

Теперь мы ввели уже достаточное количество определений и обозначений для того, чтобы сформулировать основную теорему.

Теорема. *Пусть задан счетный однородный марковский процесс без начал и с конечным числом концов R_i. Тогда все нерегулярные концы процесса единственным*

образом разбиваются на простые концы и связки особых концов. Каждому простому концу R_j однозначно сопоставляются так, как это было описано выше, вероятности $q_i^{(j)}$, $r_i^{(j)}$, удовлетворяющие (1). *Каждой связке особых концов S_j однозначно сопоставляются так, как это было описано выше, величины $u_i^{(j)}$, удовлетворяющие условиям* (3), (4), (5).

Обратно, пусть заданы переходные плотности такие, что им соответствуют процессы без начал и с конечным числом концов. Пусть среди всех нерегулярных концов процесса произвольным образом выделены концы, названные простыми, а остальные нерегулярные концы разбиты на непересекающиеся группы, названные связками. Пусть, наконец, задан набор чисел $q_i^{(j)}$, $r_i^{(j)}$, $u_i^{(j)}$, удовлетворяющих условиям (1), (3), (4), (5). *Тогда существует и притом единственный марковский однородный процесс, имеющий эти переходные плотности, концы которого разбиваются на простые и связки особых так, как наперед задано, а величины $q_i^{(j)}$, $r_i^{(j)}$, $u_i^{(j)}$, построенные так, как это описано выше, тоже совпадают с наперед заданными.*

Доказательство проводится без использования каких-либо аналитических методов путем прямых вероятностей рассмотрений свойств выборочных функций.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дуб Дж., Стохастические процессы, М.— Л., 1956.
[2] Feller W., Trans. Am. Math. Soc., On the integro-differential equations of purely discontinuous Markoff processes, 48 (1940), 488—515; Errata, 58 (1945), 474.
[3] Добрушин Р. Л., Усп. матем. наук, Об условиях регулярности однородных по времени марковских процессов со счетным числом состояний, 7, № 6 (1952), 185—191.
[4] Doob J. L., Trans. Am. Math. Soc., Markoff chains—denumerable case, 58 (1945), 455—473.
[5] Levy P. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., Systèmes markoviens et stationnaires. Cas dénombrable. 68 (1951), 327—381.
[6] Kenda l D., Quart. J. Math., Some further patological examples in the theory of denumerable Markov processes, 7, (1956), 39—56.
[7] Blackwell D., Ann. Math. Stat., On transient processes with a countable number of states and stationary transition probabilities, 26 (1956), 654—658.
[8] Вентцель А. Д., Докл. АН СССР, Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка, III, (1956), 269—273.

SOME CLASSES OF HOMOGENEOUS DENUMERABLE MARKOV PROCESSES

R. L. DOBRUSHIN (MOSCOW)

(*Summary*)

This paper contains a description of all denumerable homogeneous Markov processes with a fixed matrix of densities transition from a certain class of these matrices.

ОБ ОДНОМ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОМ КРИТЕРИИ ОДНОРОДНОСТИ k ВЫБОРОК

И. И. ГИХМАН

В настоящей заметке рассматривается обобщение известного непараметрического критерия Н. В. Смирнова однородности двух выборок на случай любого числа выборок.

Пусть произведено k групп независимых в совокупности измерений, численностей $n_1, n_2, \ldots, n_k$, с одной и той же непрерывной функцией распределения $F_i(x)$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ в каждой группе. Задача состоит в проверке гипотезы H_0:

$$F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_k(x) = F(x).$$

По каждой группе результатов измерений построим свою эмпирическую функцию распределения $\hat{F}_i(x)$ и пусть $\hat{F}_0(x)$ — общая эмпирическая функция распределения для совокупности всех измерений

$$\hat{F}_0(x) = \frac{n_1\hat{F}_1(x) + n_2\hat{F}_2(x) + \ldots + n_k\hat{F}_k(x)}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}.$$

Для проверки гипотезы H_0 предлагается применять статистику D_k:

$$D_k^2 = \max_{-\infty<x<\infty} \sum_{i=1}^{k} n_i \{\hat{F}_i(x) - \hat{F}_0(x)\}^2, \tag{1}$$

которая при $k = 2$ совпадает с критерием Н. В. Смирнова,

$$D_2 = \max_{-\infty<x<\infty} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}\,|\hat{F}_1(x) - \hat{F}_2(x)|.$$

При гипотезе H_0 распределение статистики D_k не зависит от $F(x)$ в классе всех непрерывных распределений $\{F(x)\}$. Предельное распределение $\Phi_k(x)$ статистики D_k,

$$\Phi_k(x) = \lim_{n_1, n_2, \ldots, n_k \to \infty} \mathbf{P}\{D_k < x\}, \quad (x > 0)$$

дается следующей формулой

$$\Phi_k(x) = \frac{4}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)(2x^2)^{\frac{k-1}{2}}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu_s^{k-3}}{\left[J_{\frac{k-3}{2}}(\mu_s)\right]^2} e^{-\frac{\mu_s^2}{2x^2}}, \quad x>0, \tag{2}$$

где μ_s — s-ый положительный нуль функции Бесселя $J_{\frac{k-3}{2}}(z)$. При $k = 2$ формула (2) приводит к распределению критерия Н. В. Смирнова

$$\Phi_2(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{s=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2(2s-1)^2}{8x^2}}.$$

Для доказательства формулы (2) рассмотрим k-мерный случайный процесс

$$\eta(t) = \{\eta_1(t), \ldots, \eta_k(t)\},$$

где

$$\eta_r(t) = \sqrt{n_r}(\hat{F}_r(x) - \hat{F}_0(x)); \; r = 1, 2, \ldots, k; \; t = F(x),$$

и положим

$$D_k^2(t) = |\eta(t)|^2 = \sum_{r=1}^{k} n_r\{\hat{F}_k(x) - \hat{F}_0(x)\}^2,$$

тогда

$$D_k = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} D_k(t).$$

Вектор $\eta(t)$ при любом t лежит в гиперплоскости

$$\sum_{r=1}^{k} \sqrt{\frac{n_r}{N}}\,\eta_r = 0, N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k.$$

Введем теперь произвольную $k \times k$ ортогональную матрицу $O = \{d_{ij}\}$, в которой

$$\alpha_{kr} = \sqrt{\frac{n_r}{N}}; \; r = 1, \ldots, k,$$

и с ее помощью преобразуем случайный процесс $\eta(t)$. Пусть $\zeta(t) = O\eta(t)$. Тогда $\zeta_k(t) = 0$ и

$$D_n^2(t) = |\eta(t)|^2 = |\zeta(t)|^2 = \sum_{n=1}^{k-1} \zeta_r^2(t).$$

Легко проверить, что

$$\mathbf{M}\,\zeta_i(t) = 0, \; \mathbf{M}\,\zeta_i(t)\,\zeta_j(t) = \delta_{ij}\tau(1-t), \; \tau < t, \; i, j < k.$$

Таким образом, при $n_1, n_2, \ldots, n_k \to \infty$, случайные функции

$$\zeta_1(t), \; \zeta_2(t), \ldots, \zeta_{k-1}(t)$$

асимптотически нормальны, независимы, одинаково распределены и характеризуются корреляционной функцией

$$\mathbf{M}\,\zeta_i(t)\,\zeta_i(\tau) = \tau(1-t), \; 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant 1,$$

причем $\mathbf{M}\,\zeta_i(t) = 0 \;\; (i = 1, \ldots, \; k-1)$. Случайная $k-1$-мерная вектор-функция $\xi(t)\,(0 \leqslant t \leqslant 1)$, удовлетворяющая этим предельным условиям, может быть получена из $k-1$-мерного брауновского процесса путем наложения дополнительной гипотезы $\xi(1) = 0$. Эту случайную функцию назовем брауновским мостом *.

В силу одной теоремы Н. Н. Ченцова [1], условия которой, как легко проверить, в рассматриваемом нами случае выполнены, предельное распределение величины D_k совпадает с распределением $\Phi_k(x)$ максимума длины $k-1$-мерного вектора $\xi(t)$, где $\xi(t)$—брауновский мост. Пусть $u(\tau, x; z)$—плотность распределения внутри сферы радиуса $R\,(R > 0)$ в момент времени $t=1$ брауновской частицы в $k-1$-мерном пространстве, для траекторий, удовлетворяющих условию $\xi(\tau) = x$ при совмещенном событии $\max_{\tau \leqslant t \leqslant 1} |\xi(t)| < R$. Тогда

$$\Phi_k(x) = \frac{u_x(0, 0; 0)}{p(0)}, \tag{3}$$

где $p(x)$ — безусловная плотность распределения брауновской частицы в момент времени $t = 1$

$$p(x) = u_\infty(0, 0; x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{k-1} x_i^2}{2}}.$$

Заметим, что функция $u_R(t, x, z)$ совпадает с температурой в момент времени $1-t$ в точке x $k-1$-мерной сферы радиуса R, на поверхности которой поддерживается постоянная температура 0, создаваемая мгновенным точечным источником тепла, помещенным в начальный момент времени в точку z сферы. Таким образом

$$u_R(t, x; 0) = \frac{1}{[2\pi(1-t)]^{\frac{k-1}{2}}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{k-1} x_i^2}{2(1-t)}} - v(1-t, x), \tag{4}$$

* Термин «стохастический мост» был предложен С. Н. Бернштейном для более широкого класса процессов.

где $v(t, x)$ есть решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}, \tag{5}$$

внутри сферы $|x| < R$, удовлетворяющее дополнительным условиям

$$v(t, x)|_{t=0} = 0, \quad v(t, x)|_{|x|=R} = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{k-1}{2}}} e^{-\frac{R^2}{2t}}. \tag{6}$$

Решение уравнений (5)—(6) имеет вид: $v(t, x) = v(t, r)$, где $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2$. В этом случае уравнение (5) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{k-2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right). \tag{7}$$

Решение уравнений (6) — (7) можно получить, например, операционными методами. Пусть $\bar{v}(p, r)$ — изображение функции $v(t, r)$. Тогда

$$\bar{v}(p, r) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}} \frac{(2p)^{\frac{k+1}{4}} K_{\frac{k-3}{2}}(R\sqrt{2p})}{I_{\frac{k-3}{2}}(R\sqrt{2p})} \frac{I_{\frac{k-3}{2}}(r\sqrt{2p})}{r^{\frac{k-3}{2}}} \tag{8}$$

где $K_\nu(z)$, $I_\nu(z)$ — стандартные обозначения цилиндрических функций мнимого аргумента. Из последней формулы для $\bar{u}(p, x)$ — изображения функции $u(1-t, x)$, получаем следующее выражение:

$$\bar{u}(p, x) = \frac{1}{(2\pi)^{\nu+1}} \frac{(2p)^{\frac{\nu}{2}+1}}{r^\nu} \frac{K_\nu(r\sqrt{2p})I_\nu(R\sqrt{2p}) - K_\nu(R\sqrt{2p})I_\nu r\sqrt{2p})}{I_\nu(R\sqrt{2p})},$$

где $\nu = \frac{k-3}{2}$. Применяя теорему о разложении, получим оригинал функции в форме

$$u(1-t, x) = \frac{2}{a^2(2\pi)^{\nu+1}} \sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_s}{Rr}\right)^\nu \frac{J_\nu\left(\frac{\mu_s r}{R}\right)}{[J'_\nu(\mu_s)]^2} e^{-\frac{\mu_s^2 t}{2R^2}},$$

где μ_s — s-ый положительный нуль функции $J_\nu(z)$, $\left(\nu = \frac{k-3}{2}\right)$.

Полагая здесь $r = 0$, получим формулу (2).

Можно получить также и другие выражения для распределений $\Phi_k(x)$. Формулы (3), (4), (8) показывают, что

$$\Phi_k(x) = \Phi_k(1, x),$$

где функция $\Phi_k(t, x)$ $(t > 0)$ имеет изображение

$$\bar{\varphi}_k(p, x) = 1 - \frac{(2p)^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \frac{K_{\frac{k-3}{2}}(x\sqrt{2p})}{I_{\frac{k-3}{2}}(x\sqrt{2p})}, \quad x > 0.$$

При четном значении k правая часть последнего равенства просто выражается через показательные функции. Например, в случае сравнения четырех выборок ($k = 4$)

$$\bar{\varphi}_4(p, x) = 1 - \frac{(2p)^{3/4}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-x\sqrt{2p}}}{\operatorname{sh} x\sqrt{2p}},$$

откуда следует

$$\Phi_4(x) = 1 + 2\sum_{1}^{\infty}(1-4n^2x^2)\,e^{-2n^2x^2}.$$

Интересно отменить, что последнее распределение совпадает с предельным распределением суммы

$$\sqrt{N}\{\max_{-\infty<x<\infty}[\hat{F}_N(x) - F(x)] + \max_{-\infty<x<\infty}[F(x) - \hat{F}_N(x)]\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Ченцов, Слабая сходимость случайных процессов с траекториями без разрывов второго рода и так называемый «эвристический» подход к критериям согласия типа Колмогорова — Смирнова, Теория вероятностей и ее применения, 1, в. 1 (1956), 155—161.

ÜBER EIN NICHTPARAMETRISCHES KRITERIUM DER HOMOGENITÄT DER k-STICHPROBEN

J. J. GICHMAN (KIEV)

(*Zusammenfassung*)

Zur Prüfung der Homogenitätshypothese bezüglich k-Stichproben (unter der Annahme, daß die Verteilungsfunktion der Zufallsgröße stetig ist) wird die Statistik D_k (1) vorgeschlagen; hierbei bedeutet $\hat{F}_j(x)$ die empirische Verteilungsfunktion von der j-ten Stichprobe ($j = 1,2,\ldots,k$). Ihre asymptotische Verteilung ($n_j \to \infty$, $j = 1,\ldots,k$) wird durch die Formel (2) gegeben. Im spezialfall $k = 2$ ergibt sich das Kriterium von N. W. Smirnoff.

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА В ВИНЕРОВСКИЙ

И. Д. ЧЕРКАСОВ

В настоящей заметке рассматривается непрерывный одномерный марковский процесс $X(t)$ в интервале I. Условную функцию распределения вероятностей перехода обозначим через $F(t, x; \tau, \xi)$, т. е. положим по определению

$$F(t, x; \tau, \xi) = \boldsymbol{P}\{X(\tau) \leqslant \xi \mid X(t) = x\}. \tag{1}$$

Как известно (см. [1]), при некоторых предположениях относительно функции $F(t, x; \tau, \xi)$ рассматриваемый процесс описывается уравнением Колмогорова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a(t, x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b(t, x)\frac{\partial f}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

Здесь функция f есть плотность распределения переходных вероятностей рассматриваемого процесса:

$$f(t, x; \tau, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi}[F(t, x; \tau, \xi)], \tag{3}$$

а коэффициенты a и b определяются формулами

$$2a(t, x) = \lim_{h \to 0} \boldsymbol{M}\left\{\frac{[X(t+h) - X(t)]^2}{h}\,\middle|\, X(t) = x\right\}, \tag{4}$$

$$b(t, x) = \lim_{h \to 0} \boldsymbol{M} \left\{ \frac{X(t+h) - X(t)}{h} \,\middle|\, X(t) = x \right\}. \tag{5}$$

Функция f, как плотность распределения вероятности перехода марковского процесса (см. напр. [2]), должна удовлетворять следующим соотношениям:

$$\int_I f(t, x; \tau, \xi)\, d\xi = 1, \tag{6}$$

$$f(t, x; \tau, \xi) = \int_I f(t, x; s, y)\, f(s, y; \tau, \xi)\, dy. \tag{7}$$

В некоторых случаях преобразованием аргументов и самой функции f (о чем и будет речь в дальнейшем) можно указанный вероятностный процесс преобразовать в винеровский на некотором интервале I_1 (интервалы I и I_1 могут быть ограничены или нет).

С этой целью преобразуем уравнение (2) по формулам

$$\left.\begin{aligned} t' = \varphi(t),\ x' = \psi(t, x),\ \tau' = \varphi(\tau),\ \xi' = \psi(\tau, \xi); \\ f(t, x; \tau, \xi) = \frac{\partial \psi(\tau, \xi)}{\partial \xi} f'(t', x'; \tau', \xi'), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

примененным впервые А. Н. Колмогоровым [1].

После этого уравнение (2) заменится аналогичным уравнением с коэффициентами

$$\left.\begin{aligned} \bar{b}(t, x) = \frac{1}{\varphi'(t)} \left[a(t, x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b(t, x) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \right], \\ \bar{a}(t, x) = \frac{1}{\varphi'(t)}\, a(t, x) \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]^2 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Допустим, что уравнение (2) перешло в следующее:

$$\frac{\partial f^2}{\partial t'} + \frac{\partial^2 f^1}{\partial x'^2} = 0. \tag{10}$$

Как известно, решением этого уравнения, удовлетворяющим соотношениям (6), (7), является неотрицательная функция

$$f^1(t', x'; \tau', \xi') = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\tau' - t')}} \exp\left[\frac{-(\xi' - x')^2}{4(\tau' - t')} \right], \tag{11}$$

задающая винеровский процесс.

После этого нетрудно уже получить функцию $f(t, x; \tau, \xi)$, являющуюся решением уравнения (2), если только преобразование (8) взаимно однозначное. Поскольку функция f, построенная согласно (8) и (11), определяет марковский процесс, описываемый уравнением (2), то задача сводится к нахождению взаимно однозначного преобразования, переводящего уравнение (2) в (10).

Введем следующие обозначения;

$$\left.\begin{aligned} \alpha(t, x) = \sqrt{a(t, x)},\ \beta(t, x) = \sqrt{a(t, x)} \int_0^x [a(t, y)]^{-\frac{1}{2}}\, dy, \\ \gamma(t, x) = 2b(t, x) - a'_x(t, x) - \sqrt{a(t, x)} \int_0^x a'_t(t, y)\, [a(t, y)]^{-\frac{3}{2}}\, dy, \\ W(t, x) = \begin{vmatrix} \alpha(t, x) & \gamma(t, x) \\ \alpha'_x(t, x) & \gamma'_x(t, x) \end{vmatrix},\ P(t, x) = \begin{vmatrix} \beta(t, x) & \gamma(t, x) \\ \beta'_x(t, x) & \gamma'_x(t, x) \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Теорема. *Пусть существуют непрерывные производные* α''_{xx}, β''_{xx}, γ''_{xx} *на всей оси* x *и функции* α, α^{-1} *ограничены. Тогда необходимым и достаточным условием* существ-

вования преобразования типа (8), *переводящего уравнение* (2) *взаимно однозначно в уравнение* (10), *является тождественное выполнение равенства*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha(t, x) & \beta(t, x) & \gamma(t, x) \\ \alpha'_x(t, x) & \beta'_x(t, x) & \gamma'_x(t, x) \\ \alpha''_{xx}(t, x) & \beta''_{xx}(t, x) & \gamma''_{xx}(t, x) \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

При выполнении этого тождества искомое преобразование дается формулами:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_{t_0}^{t} \exp\left[-\int_{t_0}^{u} W(s, x)\,\alpha^{-1}(s, x)\,ds\right] du, \\ \psi(t, x) &= \exp\left[-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} W(s, x)\,\alpha^{-1}(s, x)\,ds\right]\beta(t, x)\,\alpha^{-1}(t, x) + \\ &+ \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \exp\left[-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{u} W(s, x)\,\alpha^{-1}(s, x)\,ds\right] P(u, x)\,\alpha^{-1}(u, x)\,du. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть после применения преобразования (8) к уравнению (2) мы получили новые коэффициенты

$$\bar{a} = 1, \quad \bar{b} = 0.$$

Второе равенство из (9) в этом случае нам дает:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \sqrt{\frac{\varphi'(t)}{a(t, x)}}, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\varphi'(t)}\,a'_x(t, x)\,a^{-\frac{3}{2}}(t, x).$$

Проинтегрируем первое из этих равенств:

$$\psi(t, x) = \sqrt{\varphi'(t)}\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{a(t, y)}} + \varphi_1(t),$$

где $\varphi_1(t)$ — пока произвольная функция. Найдем производную $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ и ее значение подставим вместе с $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ в первое равенство из (9). Полученное выражение умножаем на $-2\,[\varphi'(t)]^{-\frac{1}{2}}\,a^{\frac{1}{2}}(t, x)$, после чего находим:

$$2\varphi'_1(t)\,[\varphi'(t)]^{-\frac{1}{2}}\,[a(t, x)]^{\frac{1}{2}} + \varphi''(t)\,[\varphi'(t)]^{-1}\,[a(t, x)]^{\frac{1}{2}}\int_0^x [a(t, y)]^{\frac{1}{2}}\,dy +$$

$$+\{2b(t, x) - a'_x(t, x) - [a(t, x)]^{\frac{1}{2}}\int_0^x a^{-\frac{3}{2}}(t, y)\,a'_t(t, y)\,dy\} = 0.$$

Отсюда, в соответствии с введенными обозначениями, имеем:

$$M(t)\,\alpha(t, x) + N(t)\,\beta(t, x) + \gamma(t, x) = 0, \tag{15}$$

где M — произвольная функция от t, а $N(t) = \frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}$.

Из (15) легко получается условие (13), если (15) два раза продифференцировать по x и рассмотреть затем полученную систему трех уравнений.

Достаточность. При выполнении условия $\Delta = 0$ докажем, что формулы (14) преобразуют систему координат (t, x) таким образом, что в новой системе (t', x')

рассматриваемый процесс будет уже нормальным. Предварительно докажем, что функции α и β при любом фиксированном t линейно независимы. Для этого вычисляем их вронскиан:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha'_x & \beta'_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{a} & \sqrt{a}\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{a}} \\ \frac{a'_x}{2\sqrt{a}} & 1 + \frac{a'_x}{2\sqrt{a}}\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{a}} \end{vmatrix} = \sqrt{a(t,x)} > 0,$$

что и доказывает линейную независимость функций $\alpha(t, x)$ и $\beta(t, x)$ (из условия видно, что $\alpha(t, x) > 0$). Отсюда следует, что выражения

$$\frac{W(t, x)}{\alpha(t, x)} \text{ и } \frac{P(t, x)}{\alpha(t, x)}$$

не зависят от x. Действительно, из (13) вытекает при любом t линейная зависимость функций α, β, γ, т. е.

$$M_1(t)\,\alpha(t, x) + N_1(t)\,\beta(t, x) + P_1(t)\,\gamma(t, x) = 0. \tag{A}$$

Из линейной независимости функций α и β следует, что

$$P_1(t) \not\equiv 0 \text{ при } t \in [t_0, t_1].$$

Поэтому после деления (A) на $P_1(t)$, почленного дифференцирования полученного равенства по x и введения новых обозначений получаем систему двух уравнений:

$$M_0(t)\,\alpha(t, x) + N_0(t)\,\beta(t, x) + \gamma(t, x) = 0,$$

$$M_0(t)\,\alpha'_x(t, x) + N_0(t)\,\beta'_x(t, x) + \gamma'_x(t, x) = 0,$$

где

$$M_0(t) = \frac{P(t, x)}{\alpha(t, x)}, \qquad -N_0(t) = \frac{W(t, x)}{\alpha(t, x)},$$

что и требовалось показать.

Теперь находим

$$\bar{a} = \exp\left[\int_{t_0}^{t} \frac{W(u, x)}{\alpha(u, x)}\,du\right] a(t, x)\left\{\exp\left[\frac{-1}{2}\int_{t_0}^{t} \frac{W(u, x)}{\alpha(u, x)}\,du\right]\frac{1}{\alpha(t, x)}\right\}^2 = 1. \tag{17}$$

Далее,

$$\bar{b} = \left\{\exp\int_{t_0}^{t} \frac{W(u, x)}{2\alpha(u, x)}\,du\right\}\left\{\alpha(t, x)\left[\frac{1}{\alpha(t, x)}\right]'_x + \right.$$

$$\left. + \frac{b(t, x)}{\alpha(t, x)} - \frac{W(t, x)}{2\alpha(t, x)}\int_0^x \frac{dy}{\alpha(t, y)} - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{a'_t(t, y)}{\alpha^3(t, y)}\,dy + \frac{1}{2}\frac{P(t, x)}{\alpha(t, x)}\right\},$$

что можно сокращенно записать так:

$$\bar{b} = \frac{\exp\left[\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \frac{W(u, x)}{\alpha(u, x)}\,du\right]}{2\alpha(t, x)}\left[\gamma(t, x) - \frac{\beta(t, x)}{\alpha(t, x)}W(t, x) + P(t, x)\right]. \tag{18}$$

Проверим выполнение равенства

$$\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta'_x & \gamma'_x \end{vmatrix} = \frac{\beta}{\alpha}\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha'_x & \gamma'_x \end{vmatrix} - \gamma. \tag{B}$$

Вычислив определитель, стоящий в левой части равенства, после элементарных преобразований получим:

$$\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta'_x & \gamma'_x \end{vmatrix} = \frac{\beta}{\alpha}\left[2\alpha b'_x - \alpha a''_{xx} - \frac{a'_t}{\alpha} - \frac{b a'_x}{\alpha} + \frac{a'^2_x}{2\alpha}\right] - \gamma.$$

Выражение в квадратных скобках в точности равно $\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha'_x & \gamma'_x \end{vmatrix}$, чем заканчивается доказательство равенства (B).

Теперь из (18) получаем требуемое тождество

$$\overline{b} \equiv 0.$$

Так как преобразование (14) взаимно однозначное (это вытекает из (14) и условий теоремы), то теорема доказана.

На вопрос, будет ли функция $f(t, x; \tau, \xi)$, полученная по формулам (8) из функции $f'(t', x'; \tau', \xi')$, удовлетворять соотношениям (4) и (5) в прежнем координатном пространстве, если выполнены условия единственности процесса, определяемого уравнением (2), следует ответить утвердительно. Это следует из взаимной однозначности преобразования (14).

Рассмотрим пример. Пусть имеем ($t \in [1, 2]$):

$$a(t, x) = \frac{2t}{(\cos x + 2t)^2}, \qquad b(t, x) = \frac{2(\sin x)\, t}{(\cos x + 2t)^3} - \frac{2x}{\cos x + 2t}. \tag{19}$$

Нетрудно убедиться, что здесь $\Delta = 0$.

Применяя формулы (14), будем иметь:

$$\varphi(t) = t^2, \quad \psi(t, x) = \sin x + 2xt. \tag{20}$$

Простейшим примером служат процессы Башелье.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Колмогоров А. Н., Об аналитических методах в теории вероятностей, Успехи матем. наук, вып. V (1938), 5—41.

[2] Дынкин Е. Б., Марковские процессы и полугруппы операторов, Теория вероятностей и ее применения. I, вып. 1 (1956), 12—37.

ON TRANSFORMING THE DIFFUSION PROCESS TO A WIENER PROCESS

I. D. ČERKASOV (KAZAN)

(*Summary*)

It is known that conditional distribution density

$$f(t, x, \tau, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\tau - t)}} \exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4(\tau - t)}\right]$$

is a solution to differential equation $f'_t + f''_{xx} = 0$ and determines a continuous Markov process. In the general case a Markov process of the diffusion type is described by Kolmogorov's differential equation. The purpose of this paper is to transform a continuous process of the diffusion type into a process with the above-mentioned distribution. This transformation exists if $\Delta = 0$, where Δ is some determinant composed of coefficients $a(t, x)$ and $b(t, x)$ of Kolmogorov's equation. Finally, examples of processes are given to which the theorem proved herein can be applied.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал «Теория вероятностей и ее применения» принимает оригинальные статьи и краткие сообщения по теории вероятностей, общим вопросам математической статистики и применениям теории вероятностей в естествознании и технике. Статьи по прикладным вопросам принимаются лишь в случае существенной новизны применяемых математических методов.

2. Статьи и краткие сообщения печатаются на русском языке с резюме на английском, немецком или французском языках или на английском, немецком, французском языках с резюме на русском языке.

3. Рукопись представляется в двух экземплярах, напечанной на машинке через 2 интервала на одной стороне листа с указанием адреса автора. Редакция просит в оформлении цитируемой литературы придерживаться порядка, принятого в журнале.

4. Авторам статей высылаются 50 оттисков.

5. Статьи следует направлять по адресу: Москва В-234, МГУ, Механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, или Киев, площадь Калинина, 6, Институт математики АН УССР.

NOTE TO AUTHORS

1. The journal "The Theory of Probability and its Applications" accepts original articles and communications on the theory of probability, general problems of mathematical statistics and applications of the theory of probability to natural science and technology. Articles of the latter kind will be accepted only if the mathematical methods applied are essentially new.

2. Articles and communications will be published either in Russian with summaries in English, German or French or in English, German or French with summaries in Russian.

3. All contributions should be sent in two copies, which are typewritten on one side of the sheet with double spaces. References to books and articles cited should conform to the standard adopted by the publishers.

4. The authors will be sent 50 copies of their articles.

5. Authors are requested to address their contributions: Moscow, B-234, MGU (State University), Department of Mathematics and Mechanics; or to Kiev, Kalinin Square, 6, Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR.

Подписано к печати 28.X 1957 г. Формат бумаги 70×108 1/16 Бум. л. 3,8. Печ. л. 8,56
Уч.-изд. 8,3 Тираж 2025 Заказ 2048 Т-08980

2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., д. 10

Цена ~~11 р. 25 к.~~

1-13 2-25